PRIMITIVES
ET CALCUL INTEGRAL

PRIMITIVES
ET CALCUL INTEGRAL

1) Primitives : Définitions et premières propriétés

Définition :
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I*.
On appelle Primitive de *f* sur *I* toute fonction *F* définie et dérivable sur *I*, et telle que pour tout $x \in I$, on ait : $\boxed{F'(x) = f(x)}$

Exemples :
La fonction $F: x \to x^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f: x \to 2x$
La fonction $G: x \to \frac{1}{x}$ est une primitive sur $]-\infty;0[$ ou sur $]-\infty;0[$ de la fonction $g: x \to -\frac{1}{x^2}$
La fonction $H: x \to \sqrt{x}$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $h: x \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Notation :
Il est d'usage de noter une fonction par une lettre minuscule et une primitive de cette fonction par la lettre majuscule correspondante.

Remarque :
La fonction $F: x \to x^2 + 3$ est une autre primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f: x \to 2x$
Les fonctions $x \to x^2 + 7$ ou $x \to x^2 + \sqrt{\pi}$ le sont également

Propriété :
Deux primitives d'une même fonction *f* sur un intervalle *I* **diffèrent d'une constante**.
Autrement dit : Si *F* et *G* sont deux primitives d'une même fonction *f* sur un intervalle I, alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : Pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + k$.

Preuve :
Soit *F* et *G* sont deux primitives d'une même fonction *f* sur un intervalle I. On a donc :
Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.
Par soustraction, on obtient : Pour tout $x \in I$, $F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$.
En appliquant une propriété de la dérivation d'une somme (ici d'une différence), on obtient donc :
Pour tout $x \in I$, $(F-G)'(x) = 0$. La fonction $F - G: x \to F(x) - G(x)$ est donc constante sur *I*.
Il existe donc un réel *k* tel que pour tout $x \in I$, on ait $F(x) - G(x) = k \Leftrightarrow F(x) = G(x) + k$. CQFD

Remarque :
Le résultat est faux si *I* n'est pas un intervalle.
Par exemple, sur $\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, les fonctions $x \to \frac{1+|x|}{x}$ et $x \to \frac{1}{x}$ sont deux primitives de $x \to -\frac{1}{x^2}$, mais leur différence n'est pas constante.

Vocabulaire :
On dit que les primitives d'une fonction *f* sur un intervalle *I* sont définies « à une constante près »

2) Primitives : Condition suffisante d'existence

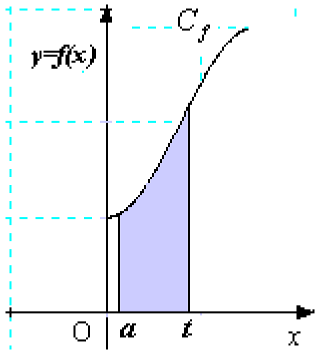
Problématique :
Nous avons, jusqu'à présent, rencontré des fonctions qui admettait une primitive sur un intervalle I.
Est-ce le cas pour toutes les fonctions ? Existe-t-il un critère d'existence des primitives d'une fonction ?

Théorème :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors f admet une (et donc une infinité) de primitives sur I.

Démonstration
Commençons par démontrer l'existence d'une primitive dans le cas d'une fonction positive monotone croissante sur I.
Le théorème se généralise ensuite.
Soit f une fonction continue, positive, monotone croissante sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ du plan.

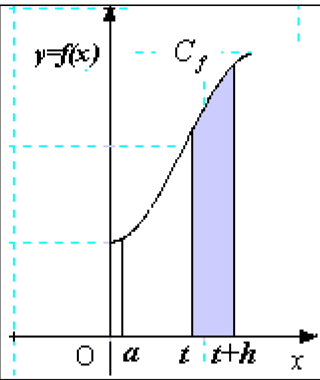
Soit $a \in I$.
On considère la fonction A, définie sur I , qui à tout $t \in I$ associe l'aire du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = t$
Ce domaine peut être décrit comme l'ensemble des points M(x ;y) tels que :

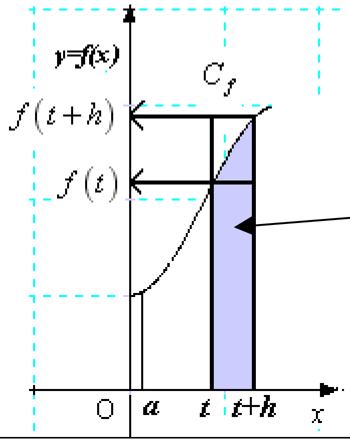
$$\begin{cases} a \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$



Alors la fonction $t \to A(t)$ est la primitive de f s'annulant en a.

En effet, il est évident que $A(a) = 0$.
Soit $t \in I$ avec t>a et soit h>0.
On s'intéresse à $A(t+h) - A(t)$, l'aire du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = t$ et $x = t + h$.





Puisque f est strictement croissante sur I, cette aire peut être encadrée par celles des deux rectangles de largeur $t+h-t=h$ et de longueurs respectives $f(t)$ et $f(t+h)$

On a donc :

$$hf(t) \leq A(t+h) - A(t) \leq hf(t+h) \Leftrightarrow f(t) \leq \frac{A(t+h) - A(t)}{h} \leq f(t+h) \text{ (car } h>0\text{)}$$

Puisque f est continue en t, on a $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} f(t+h) = f(t)$, et en appliquant le théorème des gendarmes, on obtient :

$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{A(t+h) - A(t)}{h} = f(t)$. La fonction A est donc dérivable à droite et $A'_d(t) = f(t)$.

De même (en prenant h<0), on montre que la fonction A est dérivable à gauche en tout point $t \in I$, et que $A'_g(t) = f(t)$.

Extensions :
Le théorème s'étend au cas
- d'une fonction continue monotone décroissante (le rectangle de plus grande aire est alors celui de hauteur $f(t)$)
- d'une fonction continue négative et monotone sur I : en effet, si $f \leq 0$ sur *I*, alors $-f \geq 0$ sur *I*, et si *F* est une primitive de *f* sur *I*, alors -*F* est une primitive de -*f* sur *I*.
- d'une fonction non monotone sur *I* : On divise alors *I* en *n* intervalles I_1, $I_2, \ldots I_n$ sur chacun desquels *f* est monotone. On obtient donc *n* primitives F_1, $F_2, \ldots F_n$, et on peut donc définir UNE primitive *F* par : Pour tout $x \in I_k$, $F(x) = F_k(x)$ (on dit que l'on a « recollé » les primitives)

Corollaire :
Toutes les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles sur leur ensemble de définition, les fonctions trigonométriques, les fontions exponentielles sur $\mathbb{R}$ et logarithmes sur $]0;+\infty[$ ... admettent une primitive sur leur ensemble de définition.

Remarque :
Ce théorème donne une condition suffisante pour justifier l'existence des primitives d'une fonction, mais cette condition n'est pas nécessaire. En effet, certaines fonctions discontinues peuvent admette des primitives, mais d'autres n'en admettent pas.

Unicité de la primitive prenant une valeur donnée en un point donné

Théorème :
Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I*
Alors pour tout couple $(x_0; y_0)$, avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F_0 de *f* sur *I* qui prend la valeur y_0 et x_0

Démonstration
L'existence d'une primitive *F* de *f* sur *I* est assurée par la continuité de *f* sur *I*.
Si on définit, pour tout $x \in I$, $F_0(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$, alors F_0 est la primitive de *f* sur *I* telle que $F_0(x) = y_0$

3) Tableau des primitives usuelles

Par lecture inverse du tableau des dérivées, et par application des règles usuelles de dérivation, on dresse un tableau des primitives des focntions usuelles :
Toutes les primitives sont définies « à une constante près »

Fonction *f*(*x*)=	**Primitive *F*(*x*)=**	**Intervalle**
0	k, $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
k, $k \in \mathbb{R}$	kx	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
x^α , $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ ssi $\alpha \geq 0$ $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ ssi $\alpha < 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Dans ce tableau, u désigne une fonction continue sur un intervalle I

Fonction $f(x)$=	**Primitive $F(x)$=**	**Intervalle**
$u'\times u^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ $\alpha\neq -1$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	Sur un intervalle ou u est continue (et non nulle si $\alpha<0$)
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	Sur un intervalle ou u est continue et ne s'annule pas
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	Sur un intervalle ou u est continue et ne s'annule pas
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Sur un intervalle ou u est continue et strictement positive
$u'e^{u}$	e^{u}	Sur un intervalle ou u est continue

Dans ce tableau, u et v désignent deux fonctions continues sur un intervalle I, et U et V désignent deux quelconques de leurs primitives sur cet intervalle.

Fonction $f(x)$=	**Primitive $F(x)$=**	**Intervalle**
ku , $k\in\mathbb{R}$	kU	I
$u\pm v$	$U\pm V$	I
$u'v+uv'$	$u\times v$	I
$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$\dfrac{u}{v}$	I

4) Notion d'intégrale – Définitions

Définition :
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle.
Si F est une primitive de f sur I, on définit l'intégrale de f entre a et b comme étant le nombre réel $\boxed{F(b)-F(a)}$ et on note $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$. (on lit « somme (ou intégrale) de a à b de $f(x)dx$ »)

Remarques :
1) L'intégrale de f entre a et b est un nombre réel.
2) Ce nombre **ne dépend pas de la primitive choisie pour f.**
   En effet, soit G une autre primitive de f. Il existe un nombre réel k tel que pour tout $x\in I$, on a $G(x)=F(x)+k$.
   Le calcul de l'intégrale donne alors $\int_a^b f(x)\quad dx = G(b)-G(a)=F(b)+k-(F(a)+k)=F(b)-F(a)$
3) L'élément « dx » que l'on trouve dans l'expression de l'intégrale signifie que l'on prend la primitive (c'est à dire que l'on « intègre ») par rapport à la variable x. Ceci a une importance lorsqu'on travaille avec des fonctions de plusieurs variables.
   On aurait très bien pû écrire $\int_a^b f(t)\,dt$ ou $\int_a^b f(u)\,du$. On peut employer n'importe quelle lettre, à l'exclusion des lettres a,b et f. On dit que cette variable est "muette".
4) On écrit souvent le réel $F(b)-F(a)$ sous forme condensée $\left[F(x)\right]_a^b$.
   Ainsi, on note $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$

5) Propriétés de l'intégrale

Propriété :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle.

Alors $\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$ et $\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)dx}$

Preuve :

Si F est une primitive de f sur I, on a alors $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$

et $\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) = -\left(F(b) - F(a)\right) = -\int_a^b f(x)\,dx$

Relation de Chasles

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, a,b et c trois nombres réels de cet intervalle.

Alors $\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx}$

Preuve :
Si F est une primitive de f sur I, on a alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,dx$$

Propriété (linéarité de l'intégrale) :
Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle.

Alors $\boxed{\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx}$. De plus, pour tout nombre réel k, $\boxed{\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx}$

Preuve :
Si F et G sont les primitives f et g sur I, la fonction $F+G : x \to F(x)+G(x)$ est une primitive de la fonction $f+g : x \to f(x)+g(x)$ sur I, ce qui permet d'écrire :

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \left(F(b)+G(b)\right) - \left(F(a)+G(a)\right) = F(b) - F(a) - \left(G(b) - G(a)\right) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

De plus, pour tout nombre réel k , la fonction $kF : x \to kF(x)$ est une primitive de la fonction $kf : x \to kf(x)$ sur I, ce qui permet d'écrire : $\int_a^b kf(x)\,dx = \left[kF(x)\right]_a^b = kF(b) - kF(a) = k\left(F(b) - F(a)\right) = k\int_a^b f(x)\,dx$

Propriété : (Signe de l'intégrale)
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, a et b deux nombres réels de cet intervalle, avec $a \le b$

Si pour tout $x \in I, f(x) \ge 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$. Si pour tout $x \in I, f(x) \le 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \le 0$

Preuve :
Si F est une primitive de f sur I, et si pour tout $x \in I$, $f(x) \ge 0$ alors ceci signifie que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x) \ge 0$. La fonction F est donc croissante sur I. Puisque $a \le b$, on a alors $F(a) \le F(b)$, c'est-à-dire $F(b) - F(a) \ge 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$. La démonstration est identique dans le cas d'une fonction f négative sur I

Conséquence : comparaison d'intégrales

Propriété :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle, avec $a \leq b$. Si pour tout $x \in I, f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Preuve :

Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$, alors pour tout $x \in I$, $f(x) - g(x) \leq 0$. On applique le théorème précédent :

On aura $\int_a^b (f(x) - g(x))dx \leq 0$, mais puisque $\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$, on en concluera que $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. CQFD

Conséquence : Inégalités de la moyenne

Propriété :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle, avec $a \leq b$.
S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout $x \in [a;b]$ on ait $m \leq f(x) \leq M$, alors

$$\boxed{m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)}$$

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle, (sans avoir nécessairement $a \leq b$). S'il existe un réel M positif tel que pour tout $x \in [a;b]$ (ou $x \in [b;a]$), on ait $|f(x)| \leq M$ alors $\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M|b-a|}$

Preuve :

Si pour tout $x \in [a;b]$ on a $m \leq f(x) \leq M$, alors on applique deux fois la propriété précédente :

On aura $\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$. Mais puisque $\int_a^b mdx = [mx]_a^b = mb - ma = m(b-a)$ et de même $\int_a^b Mdx = M(b-a)$, on trouve le résultat annoncé.

S'il existe un réel M positif tel que pour tout $x \in [a;b]$ (ou $x \in [b;a]$), on ait $|f(x)| \leq M$, alors cela signifie que : Pour tout $x \in [a;b]$ (ou $x \in [b;a]$), $-M \leq f(x) \leq M$. On applique le résultat précédent :

Pour tout $x \in [a;b]$ (ou $x \in [b;a]$), $-M(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. Ceci entraine que $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M|b-a|$

Valeur moyenne d'une fonction

Définition :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle, avec $a < b$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le réel $\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$

Remarque :

L'intervalle sur lequel est calculé la valeur moyenne est indissociable de l'expression
L'expression seule « valeur moyenne » n'a pas de sens.

Intégration par parties

Théorème :

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et telles que leurs dérivées f' et g' soient continues sur I. Alors pour tous réels a et b de I :

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}$$

Démonstration :

Si f et g sont dérivables sur I, alors leur produit l'est également et pour tout $x \in I$, $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Puisque les fonctions f et g sont dérivables donc continues sur I, ainsi que les fonctions f' et g' (par hypothèse), il en est de même des fonctions $x \to f'(x)g(x)$ et $x \to f(x)g'(x)$

Pour tous réels a et b de I, on aura alors $\int_a^b \left(f(x)g(x)\right)' dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Puisque $\int_a^b \left(f(x)g(x)\right)' dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b$, on aboutit au résultat.

Primitive définie par une intégrale

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et a un réel de I.

La fonction G définie sur I par $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ est **la** primitive de f sur I qui s'annule en a.

Preuve :

Si F est une primitive de f sur I, alors pour tout $x \in I$, $G(x) = \int_a^x f(t)dt = \left[F(t)\right]_a^x = F(x) - F(a)$, ce qui prouve que G est une primitive de f sur I (car deux primitives diffèrent d'une constante)

De plus $G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ ce qui achève la démonstration.

6) Calculs de grandeurs à l'aide d'intégrales

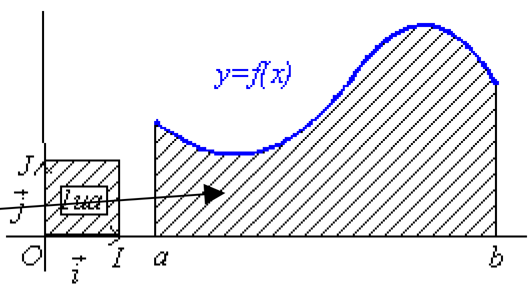
Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

L'unité d'aire sera $OI \times OJ$, aire du rectangle ayant pour côtés les segments $[OI]$ et $[OJ]$.

On considère une fonction f continue sur un intervalle I, et a et b deux réels de I avec $a \leq b$

Propriété :

Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x)dx$ désigne l'aire, exprimée en unités d'aires du domaine constitué des points $M(x;y)$ vérifiant $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$



Preuve :

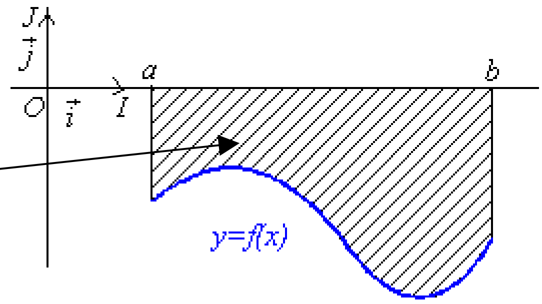
On a déjà vu, dans le paragraphe 2 que la fonction $t \to A(t)$ où $A(t)$ est l'aire du domaine $D_t = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq t \ , \ 0 \leq y \leq f(x)\right\}$ était la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Si F est une primitive quelconque de f, on a alors : Pour tout $t \in I$, $A(t) = F(t) - F(a)$

Ainsi $A(b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$, ce qui démontre le résultat.

Propriété :

Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leq 0$, $\int_a^b f(x)dx$ est égale à l'opposé de l'aire, exprimée en unités d'aires du domaine constitué des points $M(x;y)$ vérifiant $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$



Preuve :

Si $f \leq 0$ sur [a;b], alors $-f \geq 0$ sur [a;b], et si F est une primitive de f sur [a;b], alors -F est une primitive de -f sur [a;b]. Ainsi l'aire du domaine $D_b = \{(x;y) \in R^2 / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ est égale à :
$-F(b) - (-F(a)) = -(F(b) - F(a)) = -aire\, D_b$

Cas d'une fonction de signe quelconque sur [a;b]

Propriété :

Si f est de signe quelconque sur [a;b], $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ est égale à la somme des aires algébriques de f sur chacun des n intervalles $[a_1;b_1]$, $[a_2;b_2]$,....$[a_n;b_n]$ sur lesquels f est de signe constant.

Preuve :

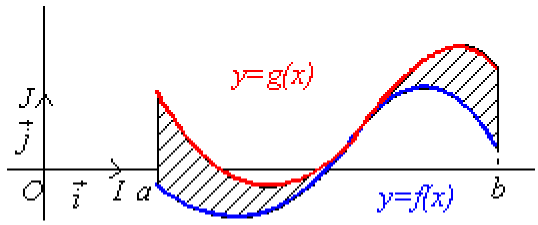
Il suffit d'utiliser la relation de Chasles : $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} f(x)dx$

Sur chacun des intervalles $[a_i;b_i]$, si $f(x) \geq 0$, $\int_{a_i}^{b_i} f(x)dx$=aire(D_i), et si $f(x) \leq 0$, $\int_{a_i}^{b_i} f(x)dx$= - aire(D_i)

Théorème :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$.
Lorsque $f \leq g$ sur l'intervalle I , c'est à dire que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$, l'aire du domaine délimité par les courbes C_f et C_g , et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à

$$\boxed{\int_a^b (g(x) - f(x))dx}$$



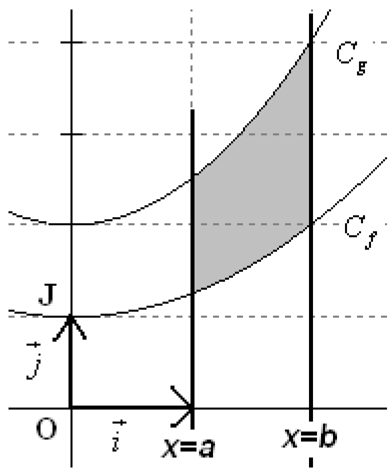
Le domaine peut être décrit comme l'ensemble des points M(x ;y) tels que :
$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$

Démonstration :

Quitte à utiliser la relation de Chasles, et à additionner plusieurs aires, on peut se placer sur un intervalle sur lequel chacune des fonctions f et g ne change pas de signe.
De deux choses l'une :

- Ou bien les fonctions f et g sont de même signe, par exemple positifs sur I

Alors l'aire du domaine délimité par les courbes C_f et C_g , et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ s'obtient par soustraction des deux aires $\int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)dt$ (car les fonctions sont positives)
Par linéarité de l'intégrale, on obtient le résultat attendu.

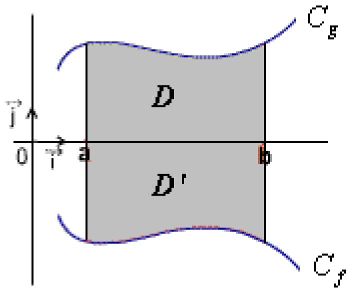


- Ou bien les fonctions f et g sont de signe contraire

Supposons par exemple que sur pour tout $x \in I$, $f(x) \leq 0$ et $0 \leq g(x)$

Alors l'aire du domaine délimité par les courbes C_f et C_g , et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ s'obtient par addition des deux aires D et D'

Mais puisque pour tout $x \in I$, $f(x) \leq 0$, l'aire du domaine D' vaut $-\int_a^b f(t)\,dt$ et puisque pour tout $x \in I$, $0 \leq g(x)$, l'aire du domaine D vaut $\int_a^b g(t)\,dt$, on obtient le résultat attendu par addition.



Calcul de volumes

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$

<u>L'unité de volume</u> sera $OI \times OJ \times OK$,volume du parallélépipède ayant de côtés les segments [OI],[OJ] et [OK]

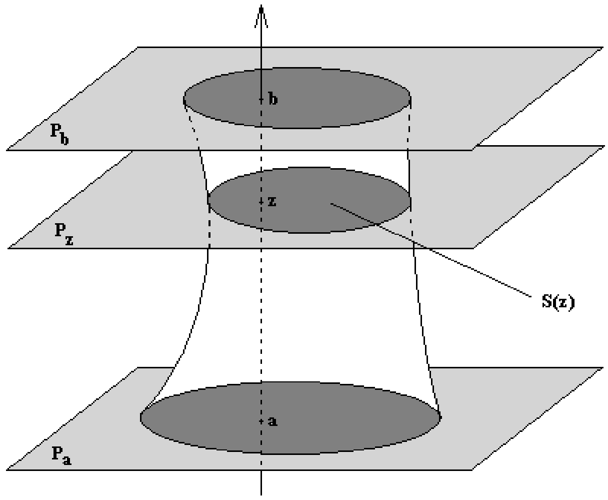
<u>Théorème :</u>

On suppose que la section du domaine D de l'espace par un plan (P) parallèle à xOy de cote z a une aire $S(z)$ connue qui soit une fonction continue de z alors le volume du domaine D compris entre les plans de cotes respectives a et b est

$$\boxed{V(D) = \int_a^b S(z)\,dz}$$

Remarque :

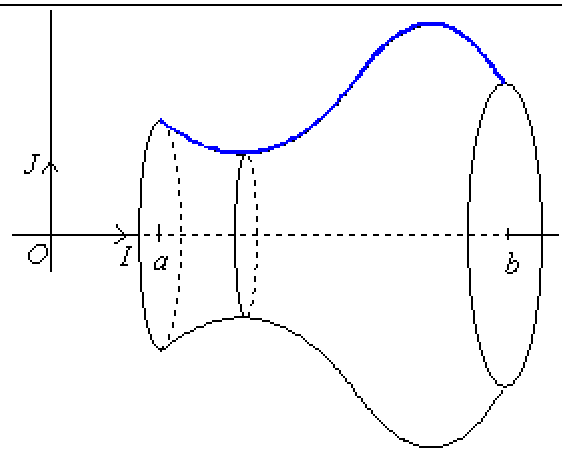
On obtient des résultats analogues avec des plans parallèles à yOz ou parallèles à xOy.



Cas particulier du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses d'un domaine limité par une courbe $y = f(x)$.

<u>Théorème :</u>

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$ et (E) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ alors le volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses par le domaine (E) est $V(E) = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$



PRIMITIVES ET CALCUL INTEGRAL - RESUME

1) Intégrale

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle.

Si F est une primitive de f sur I, on définit l'intégrale de f entre a et b comme étant le nombre réel $\boxed{F(b)-F(a)}$ et on note $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$. (on lit « somme (ou intégrale) de a à b de $f(x)dx$ »)

L'intégrale de f entre a et b est un nombre réel qui ne dépend pas de la primitive F choisie

2) Propriétés

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux nombres de cet intervalle, et k un réel. Alors

$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$, $\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)dx}$, $\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx}$ pour tout réel $c \in [a;b]$

Linéarité de l'intégrale : $\boxed{\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx}$ et $\boxed{\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)dx}$

Signe de l'intégrale :

Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

Passage aux intégrales dans les inégalités : Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

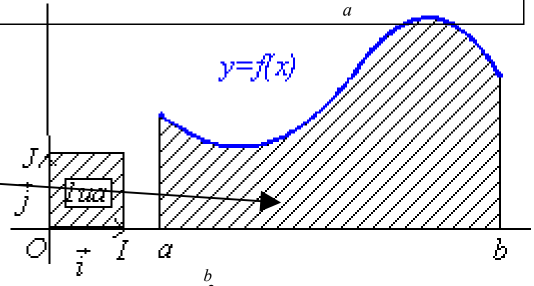
Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle [a;b] : $\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$ (avec $a < b$)

Primitive définie par une intégrale : La fonction G définie sur I par $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ est **la** primitive de f qui s'annule en a.

Intégration par parties : Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I, et telles que leurs dérivées f' et g' soient continues sur I. Alors pour tous réels a et b de I : $\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}$

3) Calcul d'aires

Le domaine peut être décrit comme l'ensemble des points M(x ;y) tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

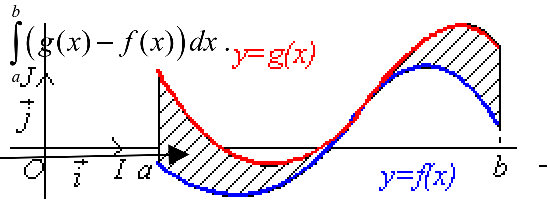


Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x)dx$ désigne l'aire, exprimée en **unités d'aires** du domaine limité par la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$

Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leq 0$, $\int_a^b f(x)dx$ sera égale à **l'opposé de l'aire**, exprimée en unités d'aires du domaine constitué des points $M(x;y)$ vérifiant $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$. Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$, l'aire (en ua) du domaine limité par les courbes Cf et Cg, et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à $\int_a^b \left(g(x)-f(x)\right)dx$.

Le domaine peut être décrit comme l'ensemble des points M(x ;y) tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$



PRIMITIVES - EXERCICES

Exercice n°1. (correction)
Dérivée et primitives

1) Calculez la dérivée de la fonction *f* définie par $f(x)=3x^3-9x+1$.

2) Déduisez-en deux primitives de la fonction *g* définie par $g(x)=9x^2-9$

3) Déterminer le sens de variation de *f* sur $\mathbb{R}$

Exercice n°2 à 11 – Primitives sans fonction logarithme
Déterminer une primitive de *f* sur un intervalle contenu dans son ensemble de définition

Exercice n°2. (correction)
Usage des tableaux de primitives usuelles

1) $f(x)=2x+1$ 2) $f(x)=10x^4+6x^3-1$ 3) $f(x)=(x-1)(x+3)$ 4) $f(x)=\frac{1}{x^2}-x^2$

5) $f(x)=\frac{-4}{3x^5}$ 6) $f(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x}}$ 7) $f(x)=\sin x-2\cos x$

Exercice n°3. (correction)
Primitive et constante

Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=3x-1+\frac{2}{x^2}$.

Déterminer la primitive *F* de *f* sur $]0;+\infty[$ qui s'annule pour $x=1$.

Exercice n°4. (correction)
Trouver **la** primitive *F* de *f* sur *I* vérifiant la condition donnée

1) $f(x)=1-x+x^2-x^3$ I=$\mathbb{R}$ $F(1)=0$

2) $f(x)=x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ I=$]0;+\infty[$ $F(1)=1$

Exercices n°5 à n°8 : Déterminer une primitive des fonctions données sur un intervalle que l'on précisera.

Exercice n°5. Forme $u'u^n$ (correction)

1) $f(x)=3(3x+1)^4$	2) $f(x)=16(4x-1)^3$	3) $f(x)=(2x+7)^6$	4) $f(x)=(6x-2)(3x^2-2x+3)^5$
5) $f(x)=\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$	6) $f(x)=\sin x\cos x$		

Exercice n°6. **Forme** $\frac{u'}{u^2}$ (correction)

1) $f(x)=\frac{4}{(1+4x)^2}$	2) $f(x)=\frac{6}{(2x+1)^2}$	3) $f(x)=\frac{1}{(4x+3)^2}$	4) $f(x)=\frac{-1}{(2-x)^2}$
5) $f(x)=\frac{2}{(4-3x)^2}$	6) $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$	7) $f(x)=\frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}$	8) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
9) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$			

Exercice n°7. (correction)

Soit la fonction *f* définie par $f(x)=\frac{3x+4}{(x+1)^3}$.

1) Déterminer les réels *a* et *b* tels que, pour tout $x\neq-1$, $f(x)=\frac{a}{(x+1)^2}+\frac{b}{(x+1)^3}$.

2) En déduire une primitive *F* de *f* sur $]-1;+\infty[$.

Exercice n°8. **Forme** $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ (correction)

1) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{3x+2}}$ 2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-5x}}$ 3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$

4) $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ 5) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ 6) $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$

Exercice n°9. (correction)

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x\sqrt{x}$.

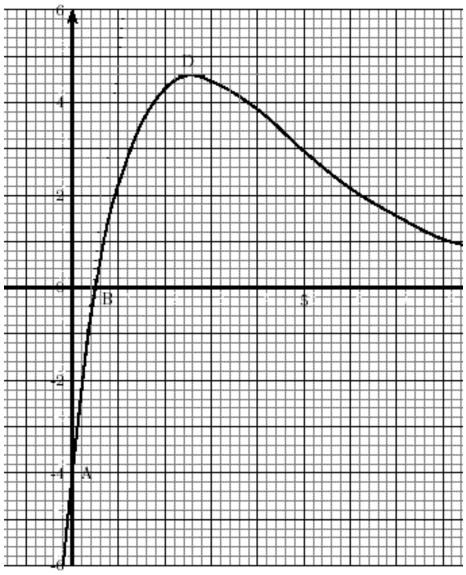
1) Calculez la dérivée de g sur $]0;+\infty[$

2) soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

Déduisez de la première question une primitive de f sur $]0;+\infty[$

Exercice n°10. (correction)

La courbe (C) donnée ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



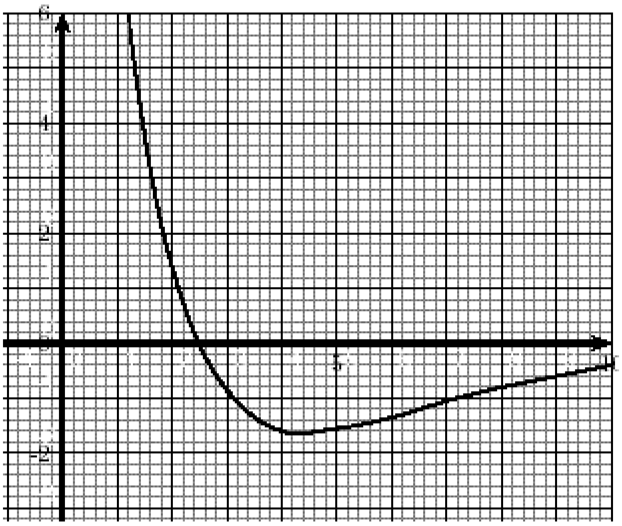
1) Pour chacune des affirmations ci-dessous indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse :

a. Toute primitive de f s'annule pour 0,5.

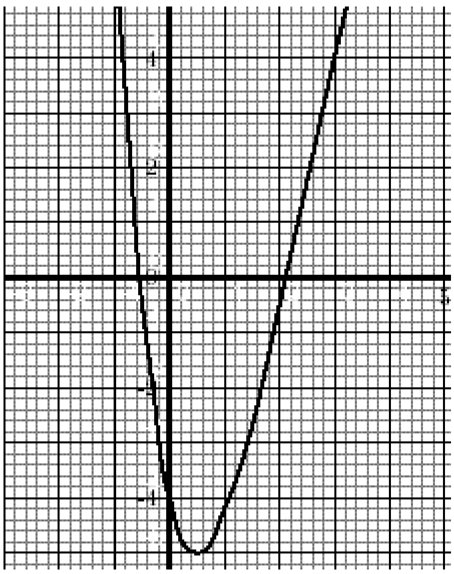
b. Toute primitive de f est décroissante sur [0 ; 0,5].

2. Parmi les courbes (C_1) et (C_2) données ci-dessous, l'une est la représentation graphique d'une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Indiquer laquelle en précisant les raisons de votre choix.

Courbe 1



Courbe 2



Exercice n°11 à 16 – Primitives utilisant les fonctions logarithmes et exponentielles

Exercice n°11. (correction)

Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

1) $f(x)=x^2-5x+\frac{1}{x}$ sur I=$]0;+\infty[$

2) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$ sur I=$]0;+\infty[$

3) $f(x)=\frac{7}{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$ I=$]0;+\infty[$

4) $f(x)=\frac{3}{3x-4}$ sur I=$\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$

5) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ sur I=$]-1;+\infty[$

6) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ sur I=$]-\infty;-1[$

7) $f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$ sur $]2;+\infty[$

8) $f(x)=\frac{1}{3x-5}$ sur $[2;+\infty[$

9) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$

10) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ sur $]-1;1[$

Exercice n°12. (correction)

On considère la fonction définie sur $I=[4;+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x^2-3x-4}{x-2}$

1) Trouver trois réels $a,b,$ et c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$

2) En déduire une primitive de f sur $[4;+\infty[$

Exercice n°13. (correction)

Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

1) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ sur I=$\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

2) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ sur I=$[1;+\infty[$

3) $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ sur $]1;+\infty[$

4) $f(x)=\tan x$ sur $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$

Exercice n°14. (correction)

Déterminez une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f donnée :

1) $f(x)=\frac{1}{4}e^x$	2) $f(x)=e^{-x}$	3) $f(x)=e^{2x+3}$	4) $f(x)=xe^{x^2}$	5) $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$

Exercice n°15. (correction)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)e^x$

Déterminez les nombres a et b tels que la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$, par $F(x)=(ax+b)e^x$ soit une primitive de f.

Exercice n°16. (correction)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{3}{e^{-x}+1}$

1) Vérifiez que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x)=\frac{3e^x}{e^x+1}$

2) Déduisez en la primitive F de f qui s'annule pour x=0

CALCUL INTEGRAL - EXERCICES

Exercice n°17. (correction)

Calculez les intégrales suivantes :

1) $\int_0^3 (x-4)\,dx$ 2) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2t-1+\frac{1}{t^2}\right)dt$ 3) $\int_{-2}^0 4t^3 dt$ 4) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$

5) $\int_0^3 \frac{2}{(2x+3)^2}dx$ 6) $\int_4^2 \frac{dx}{(4-3x)^2}$ 7) $\int_1^{-1} \frac{dx}{\sqrt{4-2x}}$ 8) $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{5-3x}}dx$

9) $\int_0^2 \frac{dx}{x+1}$ 10) $\int_{-4}^{-3} \frac{3}{x+2}dx$ 11) $\int_{-2}^0 \frac{4}{1-5x}dx$ 12) $\int_1^2 \frac{x^2+x-2}{x^2}dx$

13) $\int_3^4 \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2-x}-\frac{4}{x+2}\right)dx$ 14) $\int_2^5 e^x dx$ 15) $\int_2^5 -e^{-x}dx$ 16) $\int_0^2 2e^{2x-1}dx$

17) $\int_2^1 \left(e^{2t}+2e^t-3\right)dt$ 18) $\int_{-1}^1 e^{3x+1}dx$ 19) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$

20 $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ 21) $\int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x\left(e^x-3\right)dx$ 22) $\int_0^1 \frac{e^{-x}-2}{e^x}dx$ 23) $\int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{x-1}dx$

Exercice n°18. Vrai ou Faux ? (correction)

Soient f et g deux fonctions quelconques continues et positives sur $[0;+\infty[$.

1) La fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $x \mapsto \int_5^x f(t)dt$ a pour dérivée *f*.

2) La fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $x \mapsto \int_5^x f(t)dt$ prend des valeurs toutes positives ou nulles.

3) Pour tous réels *a* et *b* de $[0;+\infty[$, $\int_a^b f(x)g(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$.

4) $\int_0^\pi \sin x \cos x dx = 0$

5) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \frac{1}{3}$.

6) $\int_0^{-\pi} \sin^4 x dx = \int_0^\pi \sin^4 x dx$.

Exercice n°19. (correction)

Calculez l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$ (indication : $\frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$)

Exercice n°20. (correction)

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x\ln x - x$

1) Déterminez la dérivée g' de g

2) Calculez $\int_1^e \ln x dx$

Exercice n°21. (correction)

Soit *f* la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1}$

1) Montrez que pour tout *x* de $]1;+\infty[$, $f(x) = x+4+\frac{3}{x-1}$

2) Calculez $\int_4^2 \frac{x^2+3x-1}{x-1}dx$

Exercice n°22. (correction)

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$ par $f(x)=\frac{6x^2+13x+4}{3x+2}$

1) Trouver trois nombres réels a, b et c tels que pour tout x de $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$, $f(x)=ax+b-\frac{c}{3x+2}$

2) Calculez $\int_0^2 \frac{6x^2+13x+4}{3x+2}dx$

Exercice n°23. (correction)

1) Etudiez le signe de x^2-5x+6 sur [0,7]

2) En utilisant la relation de Chasles, calculez $\int_0^7 \left|x^2-5x+6\right| dx$

Exercice n°24. (correction)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

1) Etudiez les variations de f

2) Démontrez que pour tout x de [-1;2], $\frac{1}{5}\leq f(x)\leq 1$

3) Démontrez que $\frac{3}{5}\leq \int_{-1}^2 \frac{1}{1+x^2}dx\leq 3$

Exercice n°25. (correction)

Etablir que $\int_0^1 x^2 \sin x dx \leq \int_0^1 x\sin x dx$

Exercice n°26. (correction)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$. Calculez les valeurs moyennes de f sur [0;2], [1;3] et [-1;1]

Exercice n°27. (correction)

Calculez l'intégrale I en utilisant la formule d'intégration par parties:

1) $I=\int_{-1}^0 xe^x dx$ 2) $I=\int_{-1}^0 (x+2)e^x dx$ 3) $I=\int_{-1}^0 (x+2)e^{x+1} dx$ 4) $I=\int_1^e x\ln x dx$ 5) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$

Exercice n°28. (correction)

On considère l'application f_n définie pour tout t de $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_n(t)=\frac{1}{t(t^n+1)}$, où n est un entier strictement positif.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel t strictement positif : $f_n(t)=\frac{1}{t(t^n+1)}=\frac{at^{n-1}+b}{t^n+1}+\frac{c}{t}$

2)- Montrer que : $\int_1^2 f_n(t)=\ln\left(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}}\right)$

3) A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\int_1^2 \frac{t^{n-1}\ln t}{(t^n+1)^2}$

Exercice n°29. (correction)

On considère les réels $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt$ pour tout n entier naturel.

1) Calculer I_0 et I_1

2) En utilisantr une intégration par parties, montrer que pour tout n entier naturel non nul, on a $I_n - I_{n-1} = -\frac{1}{n!}$

3) Montrer que pour tout n entier naturel on a : $I_n = e - \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!}$

4) Montrer que pour tout n entier naturel non nul, on a : $0 \le I_n \le \frac{2}{n!}$

5) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice n°30. (correction)

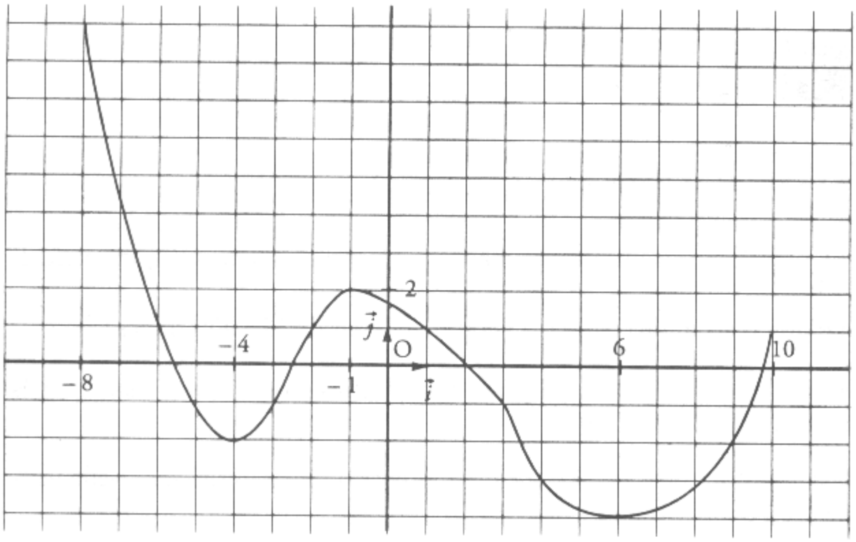
Calculez l'intégrale I en utilisant deux fois le théorème de l'intégration par parties:

1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ 2) $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ 3) $I = \int_0^{\pi} e^{2x} \cos x dx$

CALCUL D'AIRES - EXERCICES

Exercice n°31. (correction)

Soit (C) la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$. Hachurez sur le graphique ci-dessous les deux domaines ci-dessous : $D_1 = \{M(x;y)\ -2 \le x \le 0 ; 0 \le y \le f(x)\}$ $D_2 = \{M(x;y)\ 4 \le x \le 8 ; f(x) \le y \le 0\}$



Exercice n°32. (correction)

Etudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$, et calculer, en unités d'aires :

1) L'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$

2) L'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$

Exercice n°33. (correction)

La figure 1 donne la représentation graphique d'une fonction *f* et la figure 2 celle d'une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$

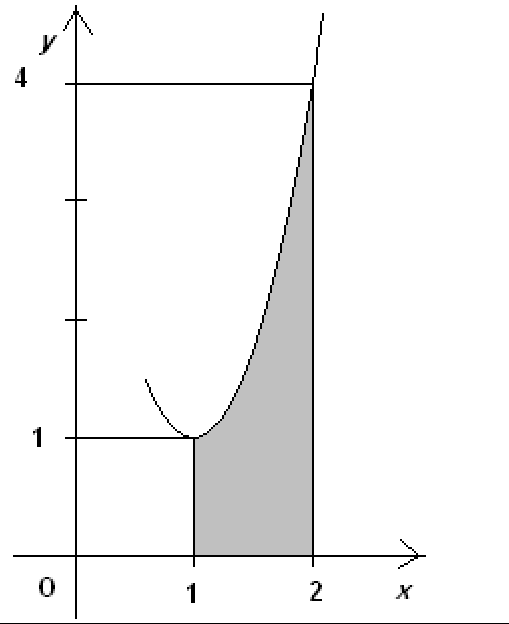


Figure 1

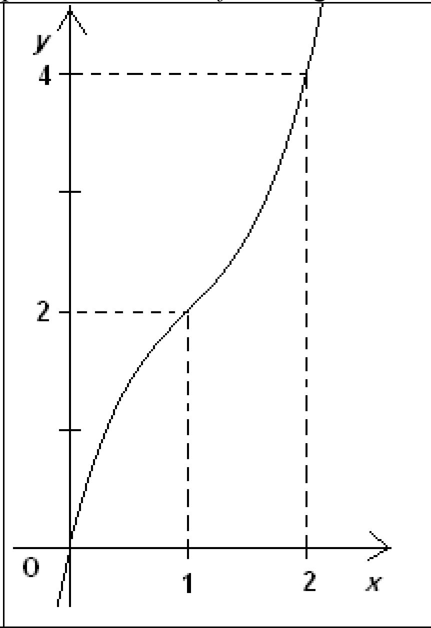


Figure 2

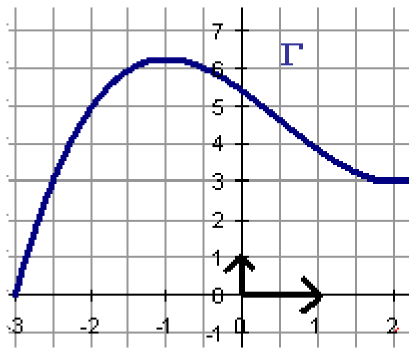
Avec ces seuls renseignements, donnez l'aire du domaine colorié

Exercice n°34. (correction)

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$

1) Etudiez les variations de *f*
2) Démontrez que *f* est positive sur [-2;0]
3) Calculez l'aire de la partie *D* du plan limitée par (*C*), les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = -2$.

Exercice n°35. (correction)



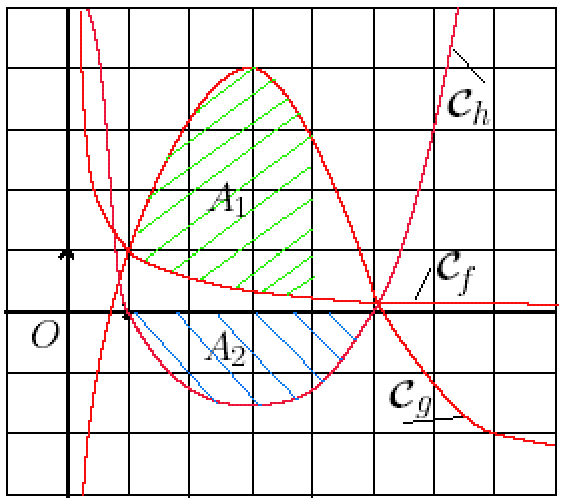
Soit *f* une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3;+\infty[$, croissante sur les intervalles $[-3;-1]$ et $[2;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $[-1;2]$. La courbe Γ représentative de la fonction *f* est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Est-il vrai que $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \geq 7$? Donner un encadrement de $\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x$

Exercice n°36. (correction)

Dans un plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), on donne les tableaux de variations et les trois représentations graphiques C_f C_g , C_h respectives des fonctions *f*, *g*, *h* définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

x	0	1	3	5	$+\infty$
f	$+\infty$	1		1/5	0
g	$-\infty$	1	4	1/3	$-\infty$
h	6	0	$-3/2$	0	$+\infty$



1) Exprimer à l'aide d'intégrales, les mesures, exprimées en cm^2, des aires des domaines plans A_1 et A_2.

2) Sachant que sur l'intervalle [1, 3], $1 \le g(x) \le 4$, en déduire un encadrement de $\int_1^3 g(x)dx$

3) Déterminer le signe des intégrales suivantes en justifiant précisément chacune des réponses :

$\int_1^2 f(x)dx$ $\int_1^3 -g(x)dx$ $\int_1^2 h(x)dx$

4) Comparer les nombres I, J, K définis par :

I=$\int_1^3 f(x)dx$ J=$\int_1^3 g(x)dx$ K=$\int_1^3 h(x)dx$

Exercice n°37. (correction)

Considérons les fonctions *f* et *g* définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2+\frac{4}{x^2}$ et $g(x)=x^2$

On note C_f et C_g les courbes représentant *f* et *g* dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Etudier la position de C_f par rapport à C_g

2) Calculer l'aire entre C_f et C_g pour $x\in[1;5]$

3) a) Calculer l'aire entre $A(t)$ entre C_f et C_g pour $x\in[1;t]$ (pour $t>1$)

b) Calculer la limite en $+\infty$ de $A(t)$

Exercice n°38. (correction)

On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\frac{x^2-7x+10}{2(1-x)}$ et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

1) Déterminer l'ensemble de définition de *f*

2) Etudier les variations de *f* et préciser les asymptotes horizontales et/ou verticales, les tangentes horizontales et les extremums. Dresser le tableau de variations de *f*

3) Démontrer que pour tout *x* de l'ensemble de définition, $f(x)=-\frac{1}{2}x+3+\frac{2}{1-x}$

4) Calculer l'aire en cm^2 du domaine délimité par C, l'axe des abscisses, et les droites d'équation x=-3 et x=-2

Exercice n°39. (correction)

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)$ si $x>0$ et $f(0)=0$

1) Etudier le sens de variations de *f* et étudier la limite de *f* en $+\infty$. Tracer la courbe représentative *C*) de *f* dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ (on prendra 2 cm comme unité)

2) Soit $\lambda\in]0;e]$. On pose $I(\lambda)=\int_\lambda^e f(x)dx$

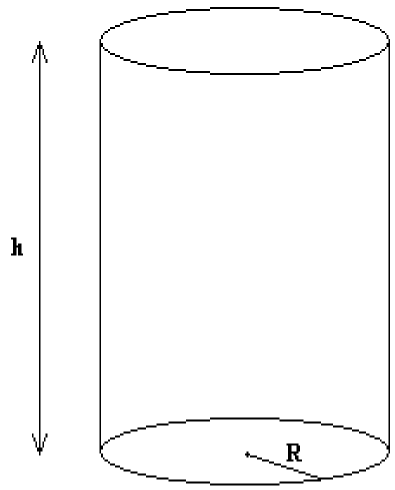
a) Calculer $I(\lambda)$ pour $\lambda\in]0;e]$

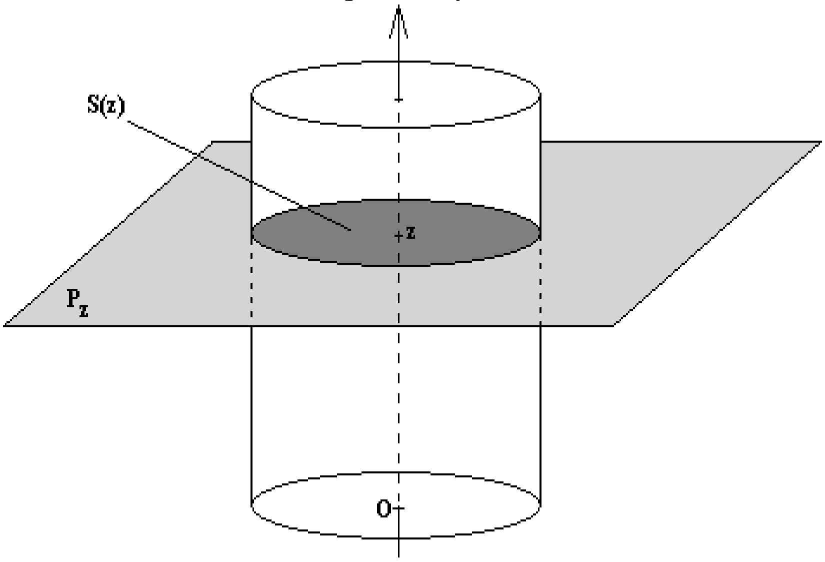
b) Calculer la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0

c) En déduire l'aire de la partie d plan limité par la courbe (*C*), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $(x=0)$ et $(x=e)$

Volume d'un cylindre :

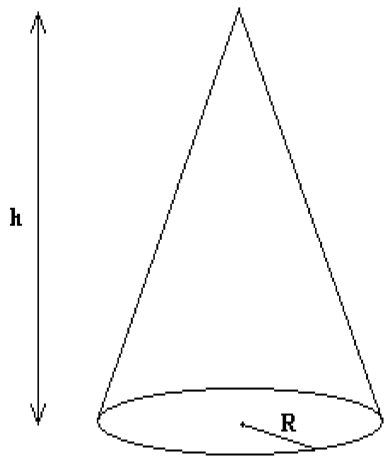
Prouver que le volume d'un cylindre de hauteur h et dont la base est un disque de rayon R est $V = \pi R^2 h$.

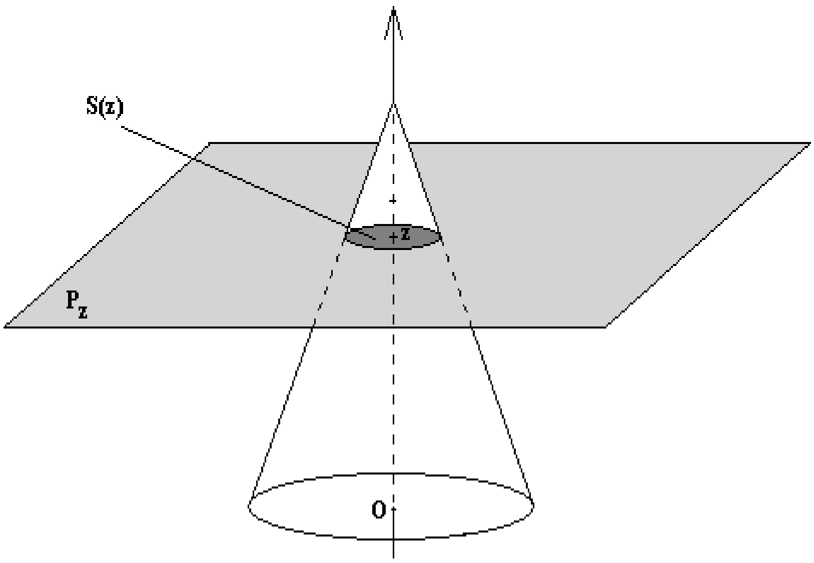




Volume d'un cône :

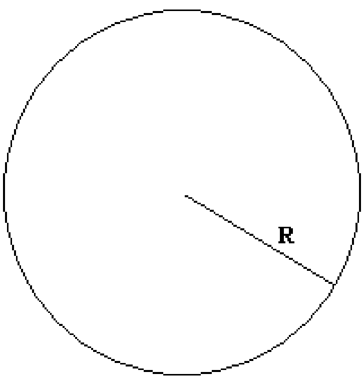
Prouver que le volume d'un cône de hauteur h et dont la base est un disque de rayon R est $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

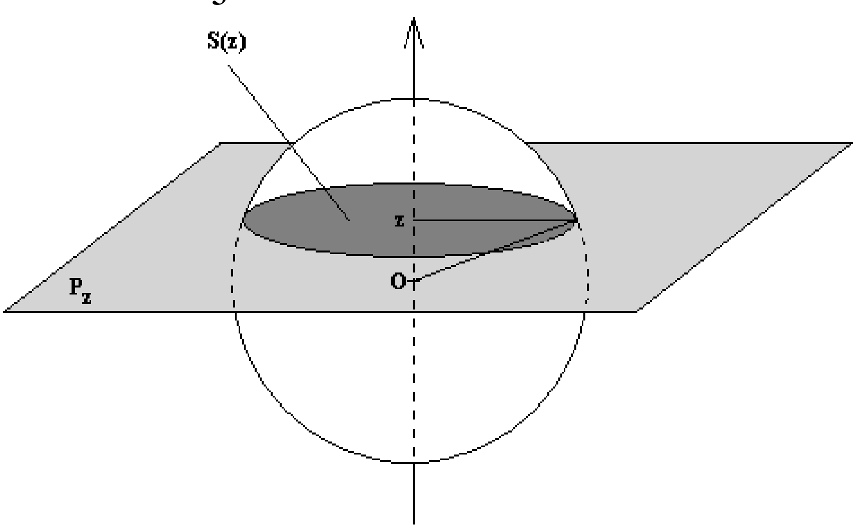




Volume d'une sphère :

Prouver que le volume d'une sphère de rayon R est $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.





PRIMITIVES - CORRECTION

Exercice n°1 (énoncé)

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \times 3x^2 - 9 \times 1 = 9x^2 - 9$.

2) Si on note g la fonction définie par $g(x) = 9x^2 - 9$, alors grâce à la question 1), on dispose d'une primitive de g en la personne de la fonction f. Un autre primitive de g serait la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) + k$, où k est une constante réelle quelconque. Ainsi $f(x) = 3x^3 - 9x + 1 + 50 = 3x^3 - 9x + 51$ est une autre primitive de g

3) Puisque $g(x) = 9x^2 - 9 = 9\left(x^2 - 1\right) = 9\left(x - 1\right)\left(x + 1\right)$, on peut établir le signe de $g(x)$, donc le sens de variation de f : Pour $x \in \left]-\infty; -1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$, $g(x) > 0$ et pour $x \in \left]-1; 1\right[$, $g(x) < 0$, donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty; -1\right[$, strictement décroissante sur $\left]-1; 1\right[$, et strictement croissante sur $\left]1; +\infty\right[$.

Exercice n°2 (énoncé)

1) La fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine, donc il existe une primitive définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{F\left(x\right) = 2 \times \frac{x^2}{2} + 1 \times x = x^2 + x}$

2) La fonction f définie par $f(x) = 10x^4 + 6x^3 - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme, donc il existe une primitive définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{F\left(x\right) = 10 \times \frac{x^5}{5} + 6 \times \frac{x^4}{4} - 1 \times x = 2x^5 + \frac{3x^4}{2} - x}$

3) La fonction f définie par $f(x) = \left(x - 1\right)\left(x + 3\right) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme, donc il existe une primitive définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{F\left(x\right) = \frac{x^3}{3} + 2 \times \frac{x^2}{2} - 3 \times x = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x}$

4) La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$ est continue sur $\left]0; +\infty\right[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il existe une primitive définie sur $\left]0; +\infty\right[$ par $\boxed{F\left(x\right) = -\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3}}$

5) La fonction f définie par $f(x) = \frac{-4}{3x^5} = -\frac{4}{3}x^{-5}$ est continue sur $\left]0; +\infty\right[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il existe une primitive définie sur $\left]0; +\infty\right[$ par $\boxed{F\left(x\right) = -\frac{4}{3} \times \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = -\frac{4}{3} \times \frac{x^{-5+1}}{-4} = \frac{x^{-4}}{3} = \frac{1}{3x^4}}$

6) La fonction f définie par $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $\left]0; +\infty\right[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il existe une primitive définie sur $\left]0; +\infty\right[$ par $\boxed{F\left(x\right) = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}}$

7) La fonction f définie par $f(x) = \sin x - 2\cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il existe une primitive définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{F(x) = -\cos x - 2\sin x}$

Exercice n°3 (énoncé)

f est continue sur $\left]0; +\infty\right[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\left]0; +\infty\right[$ définies par $F(x) = \frac{3x^2}{2} - x - \frac{2}{x} + k, k \in \mathbb{R}$.

On cherche k pour que $F(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - 1 - \frac{2}{1} + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$

La primitive F de f sur $\left]0; +\infty\right[$ qui s'annule pour x=1 est donc $\boxed{F(x) = \frac{3x^2}{2} - x - \frac{2}{x} + \frac{3}{2}}$

Exercice n°4 (énoncé)

1) f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme donc admet des primitives définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+k, k\in\mathbb{R}$. On cherche k pour que $F(1)=0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+k=0 \Leftrightarrow \frac{7}{12}+k=0$ $\boxed{\Leftrightarrow k=-\frac{7}{12}}$. La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(1)=0$ est donc $\boxed{F(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{7}{12}}$

2) f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des primitives définies sur $]0;+\infty[$ par $\boxed{F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}-2\sqrt{x}+k, k\in\mathbb{R}}$. On cherche k pour que $F(1)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{1}-2\sqrt{1}+k=1 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}+k=1$ $\boxed{\Leftrightarrow k=\frac{7}{2}}$. La primitive F de f sur $]0;+\infty[$ qui vérifie $F(1)=1$ est donc $\boxed{F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}-2\sqrt{x}+\frac{7}{2}}$

Exercice n°5 (énoncé)

1) $f(x)=3(3x+1)^4$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et $f(x)=u'(x)(u(x))^4$ où $u(x)=3x+1 \Rightarrow u'(x)=3$. Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\boxed{F(x)=\frac{(u(x))^5}{5}=\frac{(3x+1)^5}{5}}$

2) $f(x)=16(4x-1)^3$. f est définie sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=4\times4(4x-1)^3$, donc de la forme $f(x)=4u'(x)(u(x))^3$, où $u(x)=4x-1\Rightarrow u'(x)=4$. Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\boxed{F(x)=\cancel{4}\times\frac{(u(x))^4}{\cancel{4}}=(4x-1)^4}$

3) $f(x)=(2x+7)^6$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que puissance d'une fonction qui l'est, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\times2\times(2x+7)^6$, donc de la forme $f(x)=\frac{1}{2}u'(x)(u(x))^6$, où $u(x)=2x+7\Rightarrow u'(x)=2$. Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{(u(x))^7}{7}=\frac{(2x+7)^7}{14}}$

4) $f(x)=(6x-2)(3x^2-2x+3)^5$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et de la forme $f(x)=u'(x)(u(x))^5$, où $u(x)=3x^2-2x+3\Rightarrow u'(x)=6x-2$. Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\boxed{F(x)=\frac{(u(x))^6}{6}=\frac{(3x^2-2x+3)^6}{6}}$

5) $f(x)=\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$. f est définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ et continue sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ en tant que produit et puissance de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x)=-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$, donc de la forme $f(x)=-u'(x)\times(u(x))^4$, donc $\boxed{F(x)=-\frac{(u(x))^5}{5}=-\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{x}\right)^5}$

6) $f(x)=\sin x\cos x$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x\sin x$, donc de la forme $f(x)=u'(x)u(x)$, où $u(x)=\sin x\Rightarrow u'(x)=\cos x$. Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\boxed{F(x)=\frac{(u(x))^2}{2}=\frac{(\sin x)^2}{2}}$

Exercice n°6 (énoncé)

1) $f(x)=\dfrac{4}{(1+4x)^2}$ f est définie et continue sur $\left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$, f est de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$, donc f admet une primitive sur $\left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{u(x)}=-\dfrac{1}{1+4x}}$

2) $f(x)=\dfrac{6}{(2x+1)^2}$ f est définie et continue sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, $f(x)=\dfrac{3\times 2}{(2x+1)^2}$ est de la forme $f(x)=\dfrac{3\times u'(x)}{(u(x))^2}$, donc f admet une primitive sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{3}{u(x)}=-\dfrac{3}{2x+1}}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{(4x+3)^2}$ f est définie et continue sur $\left]-\dfrac{3}{4};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in\left]-\dfrac{3}{4};+\infty\right[$, $f(x)=\dfrac{\frac{1}{4}\times 4}{(4x+3)^2}$ est de la forme $f(x)=\dfrac{1}{4}\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$, donc f admet une primitive sur $\left]-\dfrac{3}{4};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{u(x)}=-\dfrac{1}{4(4x+3)}}$

4) $f(x)=\dfrac{-1}{(2-x)^2}$ f est définie et continue sur $]2;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in]2;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$ ou $u(x)=2-x\Rightarrow u'(x)=-1$ donc f admet une primitive sur $]2;+\infty[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{u(x)}=-\dfrac{1}{2-x}}$

5) $f(x)=\dfrac{2}{(4-3x)^2}$ f est définie et continue sur $\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$, $f(x)=\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)\times(-3)}{(4-3x)^2}$ est de la forme $f(x)=-\dfrac{2}{3}\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$, donc f admet une primitive sur $\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{u(x)}=\dfrac{2}{3(4-3x)}}$

6) $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (le discriminant du trinôme x^2+x+1 est strictement négatif), et pour tout $x\in\mathbb{R}$, f est de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$, où $u(x)=x^2+x+1\Rightarrow u'(x)=2x+1$ donc f admet une primitive sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{u(x)}=-\dfrac{1}{x^2+x+1}}$$

7) $f(x)=\dfrac{4x-10}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2;3\}=]-\infty;2[\cup]2;3[\cup]3;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{2(2x-5)}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$ donc de la forme $f(x)=\dfrac{2u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}$, où $u(x)=x^2-5x+6\Rightarrow u'(x)=2x-5$ donc f admet une primitive sur $]3;+\infty[$ (ou n'importe lequel des trois intervalles de son ensemble de définition), définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{2}{u(x)}=-\dfrac{2}{x^2-5x+6}}$

8) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour x appartenant à l'un des intervalles $]k\pi;(k+1)\pi[$, f étant de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}$, où $u(x)=\sin x\Rightarrow u'(x)=\cos x$, elle admet une primitive sur chaque intervalle $]k\pi;(k+1)\pi[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{u(x)}=-\dfrac{1}{\sin x}}$

9) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour x appartenant à l'un des intervalles $\left]k\dfrac{\pi}{2};(k+1)\dfrac{\pi}{2}\right[$, f étant de la forme $f(x)=\dfrac{-u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}$, où $u(x)=\cos x\Rightarrow u'(x)=-\sin x$, elle admet une primitive sur chaque intervalle $\left]k\dfrac{\pi}{2};(k+1)\dfrac{\pi}{2}\right[$ définie par $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{u(x)}=\dfrac{1}{\cos x}}$

Exercice n°7 (énoncé)

1) Pour tout $x\neq-1$, $\dfrac{a}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^3}=\dfrac{a(x+1)+b}{(x+1)^3}=\dfrac{ax+a+b}{(x+1)^3}$. Ainsi $\dfrac{a}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^3}=f(x)$ si et seulement si pour tout $x\neq-1$, $ax+a+b=3x+4\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\a+b=4\Leftrightarrow b=1\end{cases}$ Ainsi, pour tout $x\neq-1$, $\boxed{f(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^3}}$

2) f est continue sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions qui le sont, donc elle admet des primitives F sur $]-1;+\infty[$. Puisque la fonction $x\to\dfrac{3}{(x+1)^2}$ est de la forme $x\to\dfrac{3u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}$, où $u(x)=x+1\Rightarrow u'(x)=1$, une de ses primitives sur $]-1;+\infty[$ est la fonction $x\to-\dfrac{3}{u(x)}=-\dfrac{3}{x+1}$. Puisque la fonction $x\to\dfrac{1}{(x+1)^3}=(x+1)^{-3}$ est de la forme $x\to u'(x)\left(u(x)\right)^{-3}$, où $u(x)=x+1\Rightarrow u'(x)=1$, une de ses primitives sur $]-1;+\infty[$ est la fonction $x\to\dfrac{u(x)^{-3+1}}{-3+1}=-\dfrac{1}{2}u(x)^{-2}=-\dfrac{1}{2u(x)^2}=-\dfrac{1}{2(x+1)^2}$. On déduit donc qu'une primitive de f sur $]-1;+\infty[$ est la fonction F définie sur $]-1;+\infty[$ par $F(x)=-\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{2(x+1)^2}$

Exercice n°8 (énoncé)

1) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{3x+2}}$ f est définie et continue sur $\left]-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x\in\left]-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$, f étant de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=3x+2\Rightarrow u'(x)=3$, elle admet une primitive sur $\left]-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=2\sqrt{u(x)}=2\sqrt{3x+2}}$

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-5x}}$ f est définie et continue sur $\left]-\infty;\dfrac{2}{5}\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x\in\left]-\infty;\dfrac{2}{5}\right[$, $f(x)=-\dfrac{1}{5}\times\dfrac{-5}{\sqrt{2-5x}}$. f étant de la forme $f(x)=-\dfrac{1}{5}\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=2-5x\Rightarrow u'(x)=-5$, elle admet une primitive sur $\left]-\infty;\dfrac{2}{5}\right[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{5}\times2\sqrt{u(x)}=-\dfrac{2}{5}\sqrt{2-5x}}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$ f est définie et continue sur $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x\in\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{\sqrt{2x-3}}$. f étant de la forme $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=2x-3\Rightarrow u'(x)=2$, elle admet une primitive sur $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{u(x)}=\sqrt{2x-3}}$

4) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (le discriminant du trinôme x^2+x+1 est strictement négatif), et pour $x\in\mathbb{R}$, f étant de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=x^2+x+1\Rightarrow u'(x)=2x+1$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$ définie par $\boxed{F(x)=2\sqrt{u(x)}=2\sqrt{x^2+x+1}}$

5) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ f est définie et continue sur chacune des intervalles $]-\infty;-1[$ et $]1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$. f étant de la forme $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=x^2-1\Rightarrow u'(x)=2x$, elle admet une primitive sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$ et $]1;+\infty[$ définie par $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{u(x)}=\sqrt{x^2-1}}$

6) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x\in\mathbb{R}$, f étant de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=2+\sin x\Rightarrow u'(x)=\cos x$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$ définie par $\boxed{F(x)=2\sqrt{u(x)}=2\sqrt{2+\sin x}}$

Exercice n°9 (énoncé)

1) g est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $g'(x)=1\times\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

2) Puisque $g'(x)=\frac{3}{2}f(x)$, on déduit que $f(x)=\frac{2}{3}g'(x)$. Une primitive sur $]0;+\infty[$ de *f* est donc la fonction définie par $\boxed{F(x)=\frac{2}{3}g(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}}$

Exercice n°10 (énoncé)

1) a) FAUX. $f(0,5)=0$, mais cela n'influe par sur le signe de ses primitives

b) VRAI. Puisque *f* est négative sur [0 ;0,5] et positive sur $[0,5;+\infty[$, toute primitive de *f* est décroissante sur [0 ;0,5] et croissante sur $[0,5;+\infty[$

2) C'est la **courbe 1** qui correspond à la représentation graphique de toute primitive de *f*.

Exercice n°11 (énoncé)

1) $f(x)=x^2-5x+\frac{1}{x}$. f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $\boxed{F(x)=\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+\ln(|x|)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+\ln(x)}$ puisque $x\in]0;+\infty[$

2) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$. f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, puisque $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}=x+1+\frac{1}{x}$,

$\boxed{F(x)=\frac{x^2}{2}+x+\ln(|x|)=\frac{x^2}{2}+x+\ln(x)}$ puisque $x\in]0;+\infty[$

3) $f(x)=\frac{7}{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$. f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $\boxed{F(x)=7\ln(|x|)+5\times2\sqrt{x}-\frac{1}{x}=7\ln(x)+10\sqrt{x}-\frac{1}{x}}$,car $x\in]0;+\infty[$

4) $f(x)=\frac{3}{3x-4}$. f est continue sur $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$, et puisque $f(x)=\frac{3}{3x-4}=\frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)=3x-4\Rightarrow u'(x)=3$, $\boxed{F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln(|3x-4|)=\ln(3x-4)}$ car $x\in\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$

5) $f(x)=\frac{1}{x+1}$. f est continue sur $]-1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]-1;+\infty[$, et puisque $f(x)=\frac{1}{x+1}=\frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)=x+1\Rightarrow u'(x)=1$,

$\boxed{F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln(|x+1|)=\ln(x+1)}$ car $x\in]-1;+\infty[$

6) Si $x\in]-\infty;-1[$, $\boxed{F(x)=\ln(|x+1|)=\ln(-(x+1))=\ln(-x-1)}$

7) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$. f est continue sur $]2;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]2;+\infty[$, et puisque $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)=x^2-4\Rightarrow u'(x)=2x$, $\boxed{F(x)=\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=\ln\left(\left|x^2-4\right|\right)=\ln\left(x^2-4\right)}$ car $x\in]2;+\infty[$

8) $f(x)=\dfrac{1}{3x-5}$ sur $[2;+\infty[$. f est continue sur $[2;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[2;+\infty[$, et pour tout $x\in[2;+\infty[$, puisque $f(x)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{3x-5}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=3x-5\Rightarrow u'(x)=3$, $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{3}\ln\left(\left|3x-5\right|\right)=\dfrac{1}{3}\ln\left(3x-5\right)}$ car $x\in[2;+\infty[$

9) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, (le discriminant du trinôme x^2+2x+2 est strictement négatif) donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, puisque $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=x^2+2x+2\Rightarrow u'(x)=2x+2$,

$\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\left|x^2+2x+2\right|\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)}$, puisque $x\in\mathbb{R}\Rightarrow x^2+2x+2>0$

10) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ sur $]-1;1[$. f est continue sur $]-1;1[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]-1;1[$, et pour tout $x\in]-1;1[$, puisque $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x)=x^2-1\Rightarrow u'(x)=2x$, $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\left|x^2-1\right|\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)}$ puisque $x\in]-1;1[\Rightarrow 1-x^2<0$

Exercice n°12 (énoncé)

1) Pour tout $x\in[4;+\infty[$, $ax+b+\dfrac{c}{x-2}=\dfrac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}=\dfrac{ax^2+(b-2a)x-2b+c}{x-2}$

Ainsi $ax+b+\dfrac{c}{x-2}=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b-2a=-3\\-2b+c=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-3+4=1\\c=-4+2=-2\end{cases}$. Pour tout $x\in[4;+\infty[$, $\boxed{f(x)=2x+1+\dfrac{-2}{x-2}}$

2) f est définie et continue sur $[4;+\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[4;+\infty[$ A partir de l'écriture $f(x)=2x+1+\dfrac{-2}{x-2}$, on déduit l'expression d'une primitive F de f sur $[4;+\infty[$: $\boxed{F(x)=x^2+x-2\ln\left(\left|x-2\right|\right)=x^2+x-2\ln\left(x-2\right)}$ car $x\in[4;+\infty[\Rightarrow x-2>0$

Exercice n°13 (énoncé)

1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$. f est définie et continue sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, et pour tout $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, puisque $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=\sin x\Rightarrow u'(x)=\cos x$, $\boxed{F(x)=\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=\ln\left(\left|\sin x\right|\right)=\ln\left(\sin x\right)}$, puisque $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\sin x>0$.

2) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. f est définie et continue sur $[1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[1;+\infty[$, et pour tout $x\in[1;+\infty[$, puisque $f(x)=\dfrac{1}{x}\times\ln x=u'(x)\times u(x)$, ou $u(x)=\ln x\Rightarrow u'(x)=\dfrac{1}{x}$, $\boxed{F(x)=\dfrac{(u(x))^2}{2}=\dfrac{(\ln(x))^2}{2}}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$. f définie est continue sur $]1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]1;+\infty[$, et pour tout $x\in]1;+\infty[$, puisque $f(x)=\dfrac{1/x}{\ln x}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=\ln x\Rightarrow u'(x)=\dfrac{1}{x}$, $\boxed{F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln(|\ln(x)|)=\ln(\ln(x))}$ car $x\in]1;+\infty[\Rightarrow \ln x>0$

4) $f(x)=\tan x$. f définie est continue sur $\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, et pour tout $x\in\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, puisque $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{-u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=\cos x\Rightarrow u'(x)=-\sin x$, $\boxed{F(x)=-\ln(|u(x)|)=-\ln(|\cos x|)=-\ln(-\cos x)}$, puisque $x\in\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]\Rightarrow \cos x<0$.

Exercice n°14 (énoncé)

1) $f(x)=\dfrac{1}{4}e^x$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et pour tout $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{4}e^x}$.

2) $f(x)=e^{-x}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-(-e^{-x})=-u'(x)e^{u(x)}$ ou $u(x)=-x\Rightarrow u'(x)=-1$, $\boxed{F(x)=-e^{u(x)}=-e^{-x}}$.

3) $f(x)=e^{2x+3}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\times 2e^{2x+3}=\dfrac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ ou $u(x)=2x+3\Rightarrow u'(x)=2$, $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}e^{u(x)}=\dfrac{1}{2}e^{2x+3}}$.

4) $f(x)=xe^{x^2}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\times 2xe^{x^2}=\dfrac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ ou $u(x)=x^2\Rightarrow u'(x)=2x$, $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}e^{u(x)}=e^{x^2}}$.

5) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (car $x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^x+1>0$ donc $\neq 0$) donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ou $u(x)=e^x\Rightarrow u'(x)=e^x$, $\boxed{F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln(|e^x+1|)=\ln(e^x+1)}$ car $x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^x+1>0$

Exercice n°15 (énoncé)

La fonction *F*, définie sur $\mathbb{R}$, par $F(x)=(ax+b)e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonction qui le sont, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$

F sera une primitive de *f* si et seulement si pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\a+b=2\end{cases}$

Une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$ est donc $\boxed{F(x)=(x+1)e^x}$

Exercice n°16 (énoncé)

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3}{e^{-x}+1}=\dfrac{3\times e^x}{(e^{-x}+1)\times e^x}=\dfrac{3e^x}{e^{-x}\times e^x+1\times e^x}=\dfrac{3e^x}{1+e^x}$

2) . f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (car $x\in\mathbb{R}\Rightarrow 1+e^x>0$ donc $\neq 0$) donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et en utilisant l'écriture $f(x)=\dfrac{3e^x}{e^x+1}=3\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ou $u(x)=e^x+1$, on obtient $\boxed{F(x)=3\ln\left(\left|u(x)\right|\right)+k=3\ln\left(\left|e^x+1\right|\right)+k=3\ln\left(e^x+1\right)+k}$ car $e^x+1>0$ sur $\mathbb{R}$

CALCUL INTEGRAL - CORRECTION

Exercice n°17 (énoncé)

1) $\int_0^3 (x-4)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-4x\right]_0^3 = \frac{3^2}{2}-4\times 3-\left(\frac{0^2}{2}-4\times 0\right)=\frac{9}{2}-12=-\frac{15}{2}$

2) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2t-1+\frac{1}{t^2}\right)dt = \left[t^2-t-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{2}}^2 = 2^2-2-\frac{1}{2}-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{1/2}\right)=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

3) $\int_{-2}^0 4t^3dt=\left[t^4\right]_{-2}^0=0^4-(-2)^4=-16$ 4) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^4=-\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{1}\right)=\frac{3}{4}$

5) $\int_0^3 \frac{2}{(2x+3)^2}dx=\int_0^3\frac{u'(x)}{(u(x))^2}dx=\left[-\frac{1}{u(x)}\right]_0^3=\left[-\frac{1}{2x+3}\right]_0^3=-\frac{1}{2\times 3+3}+\frac{1}{2\times 0+3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$

6) $\int_4^2 \frac{dx}{(4-3x)^2}=\int_4^2 -\frac{1}{3}\frac{-3}{(4-3x)^2}dx=\int_4^2-\frac{1}{3}\frac{u'(x)}{(u(x))^2}dx=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{u(x)}\right]_4^2=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4-3x}\right]_4^2=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)=-\frac{1}{8}$

7) $\int_1^{-1}\frac{dx}{\sqrt{4-2x}}=\int_1^{-1}-\frac{1}{2}\frac{-2dx}{\sqrt{4-2x}}=-\int_1^{-1}\frac{u'(x)dx}{2\sqrt{u(x)}}=-\left[\sqrt{u(x)}\right]_1^{-1}=-\left[\sqrt{4-2x}\right]_1^{-1}=-\sqrt{6}+\sqrt{2}$

8) $\int_0^1\frac{2}{\sqrt{5-3x}}dx=\int_0^1-\frac{2}{3}\times\frac{-3}{\sqrt{5-3x}}dx=-\frac{2}{3}\int_0^1\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}dx=-\frac{2}{3}\left[2\sqrt{u(x)}\right]_0^1$

$=-\frac{2}{3}\left[2\sqrt{5-3x}\right]_0^1=-\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{3}=\frac{4}{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$

9) $\int_0^2\frac{dx}{x+1}=F(2)-F(0)$ où F est une primitive de $f(x)=\frac{1}{x+1}=\frac{u'(x)}{u(x)}$ donc $F(x)=\ln\left(|u(x)|\right)=\ln\left(|x+1|\right)$.

Comme pour tout $x\in[0;2]$, $x+1>0$, on aura $F(x)=\ln(x+1)$ donc $\int_0^2\frac{dx}{x+1}=\ln(3)-\ln(0+1)=\ln 3$

10) $\int_{-4}^{-3}\frac{3}{x+2}dx=F(-3)-F(-4)$ où F est une primitive de $f(x)=\frac{3}{x+2}=\frac{3u'(x)}{u(x)}$ donc

$F(x)=3\ln\left(|u(x)|\right)=3\ln\left(|x+2|\right)$. Comme pour tout $x\in[-4;-3]$, $x+2<0$, on aura

$F(x)=3\ln\left(-(x+2)\right)=3\ln(-x-2)$ donc $\int_{-4}^{-3}\frac{3}{x+2}dx=3\ln\left(-(-3)-2\right)-3\ln\left(-(-4)-2\right)=3\ln 1-3\ln(2)=-3\ln 2$

11) $\int_{-2}^0\frac{4}{1-5x}dx=F(0)-F(2)$ où F est une primitive de $f(x)=\frac{4}{1-5x}=-\frac{4}{5}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$ donc

$F(x)=-\frac{4}{5}\times\ln\left(|u(x)|\right)=-\frac{4}{5}\times\ln\left(|1-5x|\right)$. Comme pour tout $x\in[-2;0]$, $1-5x>0$, on aura

$F(x)=-\frac{4}{5}\times\ln(1-5x)$ donc $\int_{-2}^0\frac{4}{1-5x}dx=-\frac{4}{5}\times\ln(1-5\times 0)-\left(-\frac{4}{5}\times\ln\left(1-5\times(-2)\right)\right)=\frac{4}{5}\ln(11)$

12) $\int_1^2\frac{x^2+x-2}{x^2}dx=\int_1^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx=\left[x+\ln(|x|)+\frac{2}{x}\right]_1^2=2+\ln(|2|)+\frac{2}{2}-\left(1+\ln(|1|)+\frac{2}{1}\right)=\ln 2$

13) $\int_3^4\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2-x}-\frac{4}{x+2}\right)dx=\left[\frac{1}{4}x+\ln\left(|2-x|\right)-4\ln\left(|x+2|\right)\right]_3^4$

$=\left(\frac{1}{4}\times 4+\ln\left(|2-4|\right)-4\ln\left(|4+2|\right)\right)-\left(\frac{1}{4}\times 3+\ln\left(|2-3|\right)-4\ln\left(|3+2|\right)\right)=\frac{1}{4}-4\ln(3)+3\ln 2$

14) $\int_2^5 e^x dx = \left[e^x\right]_2^5 = e^5 - e^2$ 15) $\int_2^5 -e^{-x}dx = \int_2^5 u'(x)e^{u(x)}dx = \left[e^{u(x)}\right]_2^5 = \left[e^{-x}\right]_2^5 = e^{-5} - e^{-2} = \frac{1}{e^5} - \frac{1}{e^2} = \frac{e^2 - e^5}{e^7}$

16) $\int_0^2 2e^{2x-1}dx = \int_0^2 u'(x)e^{u(x)}dx = \left[e^{u(x)}\right]_0^2 = \left[e^{2x-1}\right]_0^2 = e^3 - e^{-1} = e^3 - \frac{1}{e} = \frac{e^4 - 1}{e}$

17) $\int_2^1 \left(e^{2t} + 2e^t - 3\right)dt = \left[\frac{1}{2}e^{2t} + 2e^t - 3t\right]_2^1 = \left(\frac{1}{2}e^2 + 2e^1 - 3\right) - \left(\frac{1}{2}e^4 + 2e^2 - 6\right) = -\frac{1}{2}e^4 - \frac{3}{2}e^2 + 2e + 3$

18) $\int_{-1}^1 e^{3x+1}dx = F(1) - F(-1)$ où F est une primitive de $f(x) = e^{3x+1} = \frac{1}{3}u'(x)e^{u(x)}$, donc $F(x) = \frac{1}{3}e^{u(x)} = \frac{1}{3}e^{3x+1}$.

Ainsi $\int_{-1}^1 e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}e^{3\times 1+1} - \frac{1}{3}e^{3\times(-1)+1} = \frac{1}{3}\left(e^4 - e^{-2}\right) = \frac{1}{3}\left(e^4 - \frac{1}{e^2}\right) = \frac{e^6 - 1}{3e^2}$

19) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1}dx = \int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \left[\ln\left(\left|u(x)\right|\right)\right]_0^1 = \left[\ln\left(\left|e^x + 1\right|\right)\right]_0^1 = \left[\ln\left(e^x + 1\right)\right]_0^1 = \ln(e+1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

20) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e u'(x)u(x)dx = \left[\frac{u^2(x)}{2}\right]_1^e = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}$

21) $\int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x\left(e^x - 3\right)dx = \int_1^e u'(x)u(x)dx = \left[\frac{u^2(x)}{2}\right]_{\ln 3}^{\ln 10} = \left[\frac{\left(e^x - 3\right)^2}{2}\right]_{\ln 3}^{\ln 10} = \frac{\left(e^{\ln 10} - 3\right)^2}{2} - \frac{\left(e^{\ln 3} - 3\right)^2}{2}$

$= \frac{(10-3)^2}{2} = \frac{49}{2}$

22) $\int_0^1 \frac{e^{-x} - 2}{e^x}dx = \int_0^1 e^{-x}\left(e^{-x} - 2\right)dx = \int_0^1 -u'(x)u(x)dx = -\left[\frac{u(x)^2}{2}\right]_0^1 = -\left[\frac{\left(e^{-x} - 2\right)^2}{2}\right]_0^1$

$-\frac{\left(e^{-1} - 2\right)^2}{2} + \frac{\left(e^0 - 2\right)^2}{2} = -\frac{\left(e^{-1} - 2\right)^2}{2} + \frac{1}{2}$

23) $\int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{x-1}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x-1}\ln(1-x)dx = \int_{-1}^0 -u'(x)u(x)dx = -\left[\frac{u(x)^2}{2}\right]_{-1}^0 = -\left[\frac{\left(\ln(1-x)\right)^2}{2}\right]_{-1}^0$

$= -\frac{\left(\ln(1-0)\right)^2}{2} + \frac{\left(\ln(2)\right)^2}{2} = \frac{\left(\ln(2)\right)^2}{2}$

Exercice n°18 (énoncé)

1) $\boxed{\textbf{VRAI}}$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $x \to \int_5^x f(t)dt$ est LA PRIMITIVE de la fonction *f* qui a s'annule en 5, donc a pour dérivée *f*.

2) $\boxed{\textbf{FAUX}}$ car puisque *f* est une fonction continue et positive sur $[0;+\infty[$, alors l'intégrale $\int_5^x f(t)dt$ sera négative ou nulle pour tout $0 \le x \le 5$. En effet, si $0 \le x \le 5$, $\int_x^5 f(t)dt$ sera positive ou nulle, par positivité de l'intégrale,

et ainsi $\int_5^x f(t)dt = -\int_x^5 f(t)dt$ sera négative ou nulle

3) $\boxed{\textbf{FAUX !}}$ Cette formule est fantaisiste. Pour s'en convaincre, choisissons $f(x)=x$, $g(x)=x^2$, qui sont positives sur $[0;+\infty[$, ainsi que $a=0$, $b=1$. On a alors $\int_a^b f(x)g(x)dx\ \int_0^1 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$ tandis que $\int_a^b f(x)dx=\int_0^1 xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$ et $\int_a^b g(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$, donc $\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Les résultats sont différents

4) On calcule $\int_0^{\pi}\sin x\cos xdx=\int_0^{\pi}\cos x\sin xdx==\int_0^{\pi}u'(x)u(x)dx$ où $u(x)=\sin x$. Ainsi $\int_0^{\pi}\sin x\cos xdx=\left[\frac{u^2(x)}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\left((\sin\pi)^2-(\sin 0)^2\right)=\frac{1}{2}(0-0)=0$. $\boxed{\text{L'affirmation est donc }\textbf{VRAIE}}$

5) On calcule $\int_1^e\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}\times(\ln x)^2dx=\int_1^e u'(x)\times u^2(x)dx$ où $u(x)=\ln x$. $\boxed{\text{L'affirmation est donc }\textbf{VRAIE}}$

Ainsi $\int_1^e\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\left[\frac{(u(x))^3}{3}\right]_1^e=\left[\frac{(\ln(x))^3}{3}\right]_1^e=\frac{(\ln(e))^3}{3}-\frac{(\ln(1))^3}{3}=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}$.

6) On peut déjà écrire que $\int_0^{-\pi}\sin^4 xdx=-\int_{-\pi}^0\sin^4 xdx$. Comme la fonction $x\to\sin^4 x$ est PAIRE sur $[-\pi;\pi]$, (puisque $(\sin(-x))^4=(-\sin(x))^4=(\sin(x))^4$), on a donc $\int_{-\pi}^0\sin^4 xdx=\int_0^{\pi}\sin^4 xdx$. $\boxed{\text{L'égalité est donc }\textbf{FAUSSE}}$

Exercice n°19 (énoncé)

Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1}{e^x+1}-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$, on utilise cette dernière écriture pour calculer l'intégrale $I=\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx$.

En effet $I=\int_0^1 1-\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1 1-\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\left[x-\ln\left(|u(x)|\right)\right]_0^1=\left[x-\ln\left(|e^x+1|\right)\right]_0^1=\left[x-\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1$ car pour tout $x\in[0,1]$, $e^x+1>0$. On conclut donc que $I=1-\ln\left(e^1+1\right)-\left(0-\ln\left(e^0+1\right)\right)=1-\ln(e+1)+\ln 2=\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$

Exercice n°20 (énoncé)

1) g est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $g'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$. g est donc une primitive de la fonction ln sur $]0;+\infty[$

2) On en déduit donc que $\int_1^e\ln xdx=\left[g(x)\right]_1^e=\left[x\ln x-x\right]_1^e=e\ln e-e-(\ln 1-1)=1$

Exercice n°21 (énoncé)

1) Pour tout x de $]1;+\infty[$, $x+4+\frac{3}{x-1}=\frac{(x+4)(x-1)+3}{x-1}=\frac{x^2-x+4x-4+3}{x-1}=\frac{x^2+3x-1}{x-1}=f(x)$

2) Pour calculer l'intégrale $\int_4^2\frac{x^2+3x-1}{x-1}dx$, on utilise la transformation d'écriture précédente. Ainsi $\int_4^2\frac{x^2+3x-1}{x-1}dx=\int_4^2\left(x+4+\frac{3}{x-1}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+4x+3\ln|x-1|\right]_4^2=\left[\frac{x^2}{2}+4x+3\ln(x-1)\right]_4^2$ car pour tout $x\in[2,4]$, $x-1>0$. On conclut $\int_4^2\frac{x^2+3x-1}{x-1}dx=\frac{2^2}{2}+8+3\ln(2-1)-\left(\frac{4^2}{2}+16+3\ln(4-1)\right)=-14+3\ln(1)-3\ln 3=-14-3\ln 3$

Exercice n°22 (énoncé)

Pour tout x de $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$, $ax+b-\frac{c}{3x+2}=\frac{(ax+b)(3x+2)-c}{3x+2}=\frac{3ax^2+(2a+3b)x+2b-c}{3x+2}=f(x)$ si et seulement si $\begin{cases}3a=6\\2a+3b=13\\2b-c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\3b=13-2\times 2\\c=2b-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\\c=2\end{cases}$

Ainsi, pour tout x de $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$, $f(x)=2x+3-\frac{2}{3x+2}$

2) Pour calculer $\int_0^2 \frac{6x^2+13x+4}{3x+2}dx$, on utilise la transformation d'écriture ci-dessus

$$\int_0^2 \frac{6x^2+13x+4}{3x+2}dx=\int_0^2\left(2x+3-\frac{2}{3x+2}\right)dx=\left[x^2+3x-\frac{2}{3}\ln\left(|3x+2|\right)\right]_0^2$$

$$=2^2+3\times 2-\frac{2}{3}\ln\left(|3\times 2+2|\right)-\left(0^2+3\times 0-\frac{2}{3}\ln\left(|3\times 0+2|\right)\right)=10-\frac{2}{3}\ln 8+\frac{2}{3}\ln 2=10+\frac{2}{3}\ln\frac{2}{8}$$

Exercice n°23 (énoncé)

1) Déterminons les racines du trinôme $P(x)=x^2-5x+6$ en calculant son discriminant $\Delta=(-5)^2-4\times 1\times 6=25-24=1$. Le trinôme admet donc deux racines réelles distinctes $x_1=\frac{5-\sqrt{1}}{2}=2$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{1}}{2}=3$. Le signe de $P(x)=x^2-5x+6$ est donné par :

x		2		3	
$P(x)=x^2-5x+6$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi,

Pour tout $x\in\left]-\infty;2\right]\cup\left[3;+\infty\right[$, $x^2-5x+6\geq 0$

Pour tout $x\in[2;3]$, $x^2-5x+6\leq 0$

2) En utilisant la relation de Chasles, on écrit $\int_0^7\left|x^2-5x+6\right|dx=\int_0^2\left|x^2-5x+6\right|dx+\int_2^3\left|x^2-5x+6\right|dx+\int_3^7\left|x^2-5x+6\right|dx$

Pour tout $x\in\left]-\infty;2\right]\cup\left[3;+\infty\right[$, $x^2-5x+6\geq 0$ donc $\left|x^2-5x+6\right|=x^2-5x+6$

Pour tout $x\in[2;3]$, $x^2-5x+6\leq 0$ donc $\left|x^2-5x+6\right|=-\left(x^2-5x+6\right)=-x^2+5x-6$

La somme $\int_0^2\left|x^2-5x+6\right|dx+\int_2^3\left|x^2-5x+6\right|dx+\int_3^7\left|x^2-5x+6\right|dx$ se réécrit donc

$$\int_0^2\left(x^2-5x+6\right)dx+\int_2^3\left(-x^2+5x-6\right)dx+\int_3^7\left(x^2-5x+6\right)dx$$

En utilisant les deux primitives $F(x)=\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+6x$ et $G(x)=-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-6x$, on calcule séparément :

$$\int_0^2\left(x^2-5x+6\right)dx=F(2)-F(0)=\frac{2^3}{3}-5\frac{2^2}{2}+12-\left(\frac{0^3}{3}-5\frac{0^2}{2}+0\right)=\frac{14}{3}$$

$$\int_2^3\left(-x^2+5x-6\right)dx=G(3)-G(2)=\left(-\frac{3^3}{3}+5\frac{3^2}{2}-18\right)-\left(-\frac{2^3}{3}+5\frac{2^2}{2}-12\right)=-25+\frac{45}{2}+\frac{8}{3}$$

$$\int_3^7\left(x^2-5x+6\right)dx=F(7)-F(3)=\left(\frac{7^3}{3}-5\frac{7^2}{2}+42\right)-\left(\frac{3^3}{3}-5\frac{3^2}{2}+18\right)=\frac{343}{3}-85$$

Au final, la valeur de l'intégrale est $\frac{14}{3}-25+\frac{45}{2}+\frac{8}{3}+\frac{343}{3}-85=\frac{365}{3}+\frac{45}{2}-110$

Exercice n°24 (énoncé)

1) Puisque pour tout réel x, $1+x^2>0$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. $f'(x)$ étant du même signe que $-2x$, on en déduit que pour tout $x\in\left]-\infty;0\right[$, $f'(x)>0$ et que pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f'(x)<0$. f est donc strictement croissante sur $\left]-\infty;0\right]$ et strictement décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$

2) On doit distinguer deux cas : Si $x\in\left[-1;0\right]$, cela signifie que $-1\leq x\leq 0$. Comme f est strictement croissante sur $\left]-\infty;0\right]$, on en déduit que $f\left(-1\right)\leq f\left(x\right)\leq f\left(0\right)$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}\leq f\left(x\right)\leq 1$. Si $x\in\left[0;2\right]$, cela signifie que $0\leq x\leq 2$. Comme f est strictement décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$, on en déduit que $f\left(0\right)\geq f\left(x\right)\geq f\left(2\right)$, c'est-à-dire $1\geq f\left(x\right)\geq\dfrac{1}{5}$. Finalement, pour tout x de [-1;2], $\dfrac{1}{5}\leq f(x)\leq 1$

3) On « passe aux intégrales » dans l'inégalité. Si pour tout x de [-1;2], $\dfrac{1}{5}\leq f(x)\leq 1$, alors $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{1}{5}dx\leq\int_{-1}^{2}f(x)dx\leq\int_{-1}^{2}1dx$

On calcule séparément $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{1}{5}dx=\left[\frac{1}{5}x\right]_{-1}^{2}=\frac{2}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}$ et $\displaystyle\int_{-1}^{2}1dx=\left[x\right]_{-1}^{2}=2-\left(-1\right)=3$, ce qui nous permet de conclure finalement que $\displaystyle\frac{3}{5}\leq\int_{-1}^{2}\frac{1}{1+x^2}dx\leq 3$

Exercice n°25 (énoncé)

Pour tout $x\in\left[0,1\right]$, $\sin x\geq 0$ et $x^2\leq x$, donc $x^2\sin x\leq x\sin x$

On « passe aux intégrales » dans l'inégalité. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 x^2\sin xdx\leq\int_0^1 x\sin xdx$

Exercice n°26 (énoncé)

La valeur moyenne sur [0;2] de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$ est égale à $\displaystyle\frac{1}{2-0}\int_0^2 x^3dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\frac{1}{2}\left[\frac{16}{4}-\frac{0}{4}\right]=2$

La valeur moyenne sur [1;3] de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$ est égale à $\displaystyle\frac{1}{3-1}\int_1^3 x^3dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3=\frac{1}{2}\left[\frac{81}{4}-\frac{1}{4}\right]=10$

La valeur moyenne sur [-1;1] de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$ est égale à $\displaystyle\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^1 x^3dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^1=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}-\frac{(-1)^4}{4}\right]=0$

Exercice n°27 (énoncé)

1) $\displaystyle I=\int_{-1}^0 xe^xdx=\int_{-1}^0 u\left(x\right)v'\left(x\right)dx$ où $u\left(x\right)=x\Rightarrow u'\left(x\right)=1$ et $v'\left(x\right)=e^x\Rightarrow v\left(x\right)=e^x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I=\left[u\left(x\right)v\left(x\right)\right]_{-1}^0-\int_{-1}^0 u'\left(x\right)v\left(x\right)dx=\left[xe^x\right]_{-1}^0-\int_{-1}^0 1\times e^xdx=0-\left(-1\right)e^{-1}-\left[e^x\right]_{-1}^0=\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}-1$$

2) $\displaystyle I=\int_{-1}^0(x+2)e^xdx=\int_{-1}^0 u\left(x\right)v'\left(x\right)dx$ où $u\left(x\right)=x+2\Rightarrow u'\left(x\right)=1$ et $v'\left(x\right)=e^x\Rightarrow v\left(x\right)=e^x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I=\left[u(x)v(x)\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}u'(x)v(x)\,dx=\left[(x+2)e^{x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}1\times e^{x}dx=2-(1)e^{-1}-\left[e^{x}\right]_{-1}^{0}=2-\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{e}\right)=1$$

3) $I=\int_{-1}^{0}(x+2)e^{x+1}dx=\int_{-1}^{0}u(x)v'(x)\,dx$ où $u(x)=x+2\Rightarrow u'(x)=1$ et $v'(x)=e^{x+1}\Rightarrow v(x)=e^{x+1}$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I=\left[u(x)v(x)\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}u'(x)v(x)\,dx=\left[(x+2)e^{x+1}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}1\times e^{x+1}dx=2e-(1)e^{0}-\left[e^{x+1}\right]_{-1}^{0}=2e-1-(e-1)=e$$

4) $I=\int_{1}^{e}x\ln x\,dx=\int_{1}^{e}u(x)v'(x)\,dx$ où $u(x)=\ln x\Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v'(x)=x\Rightarrow v(x)=\frac{x^2}{2}$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I=\left[u(x)v(x)\right]_{1}^{e}-\int_{1}^{e}u'(x)v(x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_{1}^{e}-\int_{1}^{e}\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}dx=\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{1^2}{2}\ln 1-\left[\frac{x^2}{4}\right]_{1}^{e}=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$$

5) $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}u(x)v'(x)\,dx$ où $u(x)=x\Rightarrow u'(x)=1$ et $v'(x)=\sin x\Rightarrow v(x)=-\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I=\left[u(x)v(x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}u'(x)v(x)\,dx=\left[-x\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}1\times(-\cos x)\,dx=0+0+\left[\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1$$

Exercice n°28 (énoncé)

1) En réduisant au même dénominateur : Pour tout t strictement positif,
$\frac{at^{n-1}+b}{t^n+1}+\frac{c}{t}=\frac{t\left(at^{n-1}+b\right)+c\left(t^n+1\right)}{t\left(t^n+1\right)}=\frac{(a+c)t^n+bt+c}{t\left(t^n+1\right)}=\frac{1}{t\left(t^n+1\right)}$, si et seulement si, par identification, $\begin{cases}a+c=0\\b=0\\c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=0\\c=1\end{cases}$. Ainsi, pour tout t strictement positif, $\boxed{\frac{1}{t\left(t^n+1\right)}=\frac{-t^{n-1}}{t^n+1}+\frac{1}{t}}$

2) On utilise l'écriture $f_n(t)=\frac{-t^{n-1}}{t^n+1}+\frac{1}{t}$ pour calculer l'intégrale :

$$\int_{1}^{2}f_n(t)\,dt=\int_{1}^{2}\left(\frac{-t^{n-1}}{t^n+1}+\frac{1}{t}\right)dt=\left[-\frac{1}{n}\ln\left(t^n+1\right)+\ln(t)\right]_{1}^{2}=-\frac{1}{n}\ln\left(2^n+1\right)+\ln(2)+\frac{1}{n}\ln\left(1^n+1\right)+\ln(1)$$

$$=\frac{1}{n}\ln\left(1^n+1\right)-\frac{1}{n}\ln\left(2^n+1\right)+\ln(2)=\ln\left[\left(\frac{2}{2^n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right]+\ln\left(\left(2^n\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\boxed{\ln\left(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}}\right)}$$

3) On pose $u(t)=\ln t\Rightarrow u'(t)=\frac{1}{t}$ et $v'(t)=\frac{t^{n-1}}{\left(t^n+1\right)^2}=\frac{1}{n}\frac{w'(t)}{w^2(t)}$ où $w(t)=t^n+1$, donc $v(t)=-\frac{1}{nw(t)}=-\frac{1}{n\left(t^n+1\right)}$, et ainsi : $\int_{1}^{2}\frac{t^{n-1}\ln t}{\left(t^n+1\right)^2}dt=\int_{1}^{2}u(t)v'(t)\,dt=\left[u(t)v(t)\right]_{1}^{2}-\int_{1}^{2}u'(t)v(t)\,dt$

$$=\left[-\frac{\ln t}{n\left(t^n+1\right)}\right]_{1}^{2}-\int_{1}^{2}\frac{1}{t}\times\left(-\frac{1}{n\left(t^n+1\right)}\right)dt=-\frac{\ln 2}{n\left(2^n+1\right)}+\frac{1}{n}\int_{1}^{2}\frac{1}{t\left(t^n+1\right)}dt=\boxed{-\frac{\ln 2}{n\left(2^n+1\right)}+\frac{1}{n}\ln\left(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}}\right)}$$

Exercice n°29 (énoncé)

1) Pour n=0, on doit calculer $I_0=\int_0^1 \frac{t^0}{0!}e^{1-t}dt$. En convenant que 0 !=1, et puisque pour tout t>0, $t^0=1$ (on convient que $0^0=1$) le calcul est donc $I_0=\int_0^1 e^{1-t}dt=\left[-e^{1-t}\right]_0^1=-e^0+e^1\boxed{=e-1}$

Pour n=1, on doit calculer $I_1=\int_0^1 \frac{t^1}{1!}e^{1-t}dt=\int_0^1 te^{1-t}dt=\int_0^1 u(t)v'(t)dt$ avec $u(t)=t\Rightarrow u'(t)=1$ et $v'(t)=e^{1-t}\Rightarrow v(t)=-e^{1-t}$ qui sont continûment dérivables sur [0 ;1].

Ainsi $I_1=\left[u(t)v(t)\right]_0^1-\int_0^1 u'(t)v(t)dt=\left[-te^{1-t}\right]_0^1+\int_0^1 e^{1-t}dt=-1\times e^0+0\times e^1+I_0=-1+(e-1)\boxed{=e-2}$

2) Pour tout entier n non nul, $I_n=\int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}dt=\int_0^1 u(t)v'(t)dt$ avec $u(t)=\frac{t^n}{n!}\Rightarrow u'(t)=\frac{nt^{n-1}}{n!}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ et $v'(t)=e^{1-t}\Rightarrow v(t)=-e^{1-t}$ qui sont continûment dérivables sur [0 ;1]. Ainsi $I_n=\left[u(t)v(t)\right]_0^1-\int_0^1 u'(t)v(t)dt$

$=\left[-\frac{t^n}{n!}e^{1-t}\right]_0^1+\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{1-t}dt=-\frac{1}{n!}+\frac{0^n}{n!}e^{1-0}+I_{n-1}$ d'où la relation $\boxed{I_n-I_{n-1}=-\frac{1}{n!}}$

3) Montrons par récurrence que pour tout entier n , $I_n=e-\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$. Notons $Q(k)$ la propriété « $I_k=e-\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{p!}$ »

La propriété est vraie pour k=0 car $e-\sum_{p=0}^{0}\frac{1}{p!}=e-\frac{1}{0!}=e-1$ (0 !=1), et puisqu'on a calculé $I_0=e-1$ dans la question 1)

Supposons la propriété vraie $Q(m)$ pour un entier m fixé, à savoir $I_m=e-\sum_{p=0}^{m}\frac{1}{p!}$.

On a alors, d'après la question 2), $I_{m+1}=I_m-\frac{1}{(m+1)!}$, donc en appliquant l'hypothèse de récurrence, $I_{m+1}=e-\sum_{p=0}^{m}\frac{1}{p!}-\frac{1}{(m+1)!}=e-\sum_{p=0}^{m+1}\frac{1}{p!}$, ce qui est la propriété à l'ordre m+1, et achève donc la phase d'hérédité, et la démonstration par récurrence. La propriété $I_n=e-\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$ est vraie pour tout entier n

4) Posons, pour tout entier n non nul, $f_n(t)=t^ne^{1-t}$. Pour tout entier n non nul, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout t réel, $f_n'(t)=nt^{n-1}e^{1-t}-t^ne^{1-t}=t^{n-1}e^{1-t}(n-t)$. Si n est un entier non nul, donc supérieur à 1, on peut affirmer que pour tout $t\in[0,1]$, $f_n'(t)=t^{n-1}e^{1-t}(n-t)\geq 0$, donc que f_n est croissante sur [0 ;1]. Elle atteint donc son maximum lorsque t=1, lequel maximum vaut $f_n(1)=1^ne^{1-1}=1$. Ainsi, on peut affirmer que pour tout $t\in[0,1]$, $f_n(t)\leq 1$. On passe aux inégalités dans l'intégrale. Ainsi $I_n=\int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}dt\leq\int_0^1 \frac{1}{n!}dt\leq\frac{1}{n!}(1-0)$. L'inégalité $I_n\leq\frac{2}{n!}$ (et même $I_n\leq\frac{1}{n!}$!) est donc vérifiée pour tout n non nul. Enfin, puisque pour tout $t\in[0,1]$, $f_n(t)=t^ne^{1-t}>0$, l'inégalité $I_n\geq 0$ est vérifiée par positivité de l'intégrale d'une fonction positivie. Ainsi, pour tout entier naturel n non nul, $\boxed{0\leq I_n\leq\frac{2}{n!}}$

5) Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n!}=0$, le théorème d'encadrement « des gendarmes » nous permet de conclure que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}I_n=0}$ (ce qui permet, au passage, d'établir le résultat $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}=e}$)

Exercice n°30 (énoncé)

1) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=x^2 \Rightarrow u'(x)=2x$ et $v'(x)=\sin x \Rightarrow v(x)=-\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties, $I=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)dx$

$=\left[x^2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\times(-\cos x)dx = 0-0+\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x dx$. On calcule l'intégrale $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x dx$ en effectuant une deuxième intégration par parties : $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=2x \Rightarrow u'(x)=2$ et $v'(x)=\cos x \Rightarrow v(x)=\sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties, $J=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)dx=\left[2x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\times\cos x dx = \pi-0-2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$. Finalement, $\boxed{I=\pi-2}$

2) $I=\int_0^{\pi} e^x\sin x dx=\int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=e^x \Rightarrow u'(x)=e^x$ et $v'(x)=\sin x \Rightarrow v(x)=-\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties, $I=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} u'(x)v(x)dx$

$=\left[-e^x\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x\times(-\cos x)dx=e^{\pi}+1+\int_0^{\pi} e^x\cos x dx$. On calcule $J=\int_0^{\pi} e^x\cos x dx$ en effectuant une deuxième intégration par parties : $J=\int_0^{\pi} e^x\cos x dx=\int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=e^x \Rightarrow u'(x)=e^x$ et $v'(x)=\cos x \Rightarrow v(x)=\sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$J=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} u'(x)v(x)dx=\left[e^x\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x\sin x dx=0-0-I$

On aboutit donc à l'équation $I=e^{\pi}+1-I$ c'est-à-dire $2I=e^{\pi}+1$ et on conclut ainsi que $\boxed{I=\frac{e^{\pi}+1}{2}}$

3) $I=\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x dx=\int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=e^{2x} \Rightarrow u'(x)=2e^{2x}$ et $v'(x)=\cos x \Rightarrow v(x)=\sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties, $I=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} u'(x)v(x)dx$.

$=\left[e^{2x}\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} 2e^{2x}\sin x dx=0-0-\int_0^{\pi} 2e^{2x}\sin x dx$. On calcule $J=\int_0^{\pi} 2e^{2x}\sin x dx$ en effectuant une deuxième intégration par parties : $J=\int_0^{\pi} 2e^{2x}\sin x dx=\int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=2e^{2x} \Rightarrow u'(x)=4e^{2x}$ et $v'(x)=\sin x \Rightarrow v(x)=-\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

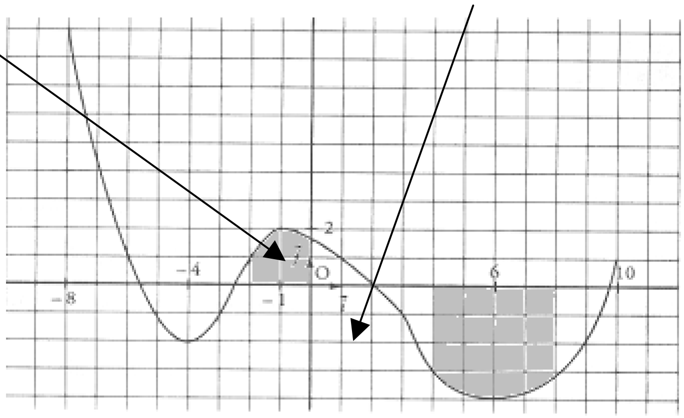
$J=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} u'(x)v(x)dx=\left[-2e^{2x}\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} 4e^{2x}(-\cos x)dx=2e^{2\pi}+2+4\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x dx=2e^{2\pi}+2+4I$

On aboutit donc à l'équation $I=-2e^{2\pi}-2-4I$ c'est-à-dire $5I=-2e^{2\pi}-2$ et on conclut ainsi que $\boxed{I=-\frac{2}{5}\left(e^{2\pi}+1\right)}$

CALCUL D'AIRES - CORRECTION

Exercice n°31 (énoncé)

$D_1 = \{M(x;y)\ \ -2 \le x \le 0 ; 0 \le y \le f(x)\}$ $D_2 = \{M(x;y)\ \ 4 \le x \le 8 ; f(x) \le y \le 0\}$



Exercice n°32 (énoncé)

La fonction *f* est un trinôme du second degré, de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a = 1$, $b = -4$ et $c = 0$. Puisque $a > 0$, *f* est strictement décroissante sur $\left]-\infty ; -\frac{b}{2a}\right] = \left]-\infty ; 2\right]$ et strictement croissante sur $\left[2 ; +\infty\right[$.

Elle atteint donc son minimum pour $x = 2$, lequel minimum vaut $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 = -4$

De plus puisque $f(x) = x^2 - 4x = x(4-x)$, on déduit le tableau de signes de *f* :

x			0		4	
$f(x) = x^2 - 4x$		+	0	−	0	+

1) Puisque pour tout $x \in [-1;0]$, $f(x) \ge 0$, l'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$ sera donnée, en unités d'aires, par $\int_{-1}^{0} f(x)dx$. A l'aide d'une primitive de *f* sur [0 ;1], définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2$, on calcule :

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = F(0) - F(-1)$$

$$= \left(\frac{0^3}{3} - 2 \times 0^2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 2 \times (-1)^2\right) = -\left(\frac{-1}{3} - 2\right) = \frac{7}{3}$$

L'aire du domaine vaut donc $\frac{7}{3}$ unités d'aire

2) Puisque pour tout $x \in [0;4]$, $f(x) \le 0$, l'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$ sera donnée, en unités d'aires, par $-\left(\int_{0}^{4} f(x)dx\right)$. A l'aide de la même primitive définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2$, on calcule :

$$\int_{0}^{4} f(x)dx = F(4) - F(0)$$

$$= \frac{4^3}{3} - 2 \times 4^2 - \left(\frac{0^3}{3} - 2 \times 0^2\right) = \frac{64}{3} - 32 = -\frac{32}{3}$$

L'aire du domaine vaut donc $\frac{32}{3}$ unités d'aire

Exercice n°33 (énoncé)

Puisque pour tout $x \in [1;2]$, $f(x) \geq 0$ (figure 1), l'aire du domaine colorié est égale à $\int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1)$.

On lit grâce à la figure 2 que $F(2) - F(1) = 4 - 2 = 2$ unités d'aire.

Exercice n°34 (énoncé)

1) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$. Le calcul du discriminant de $f'(x)$ nous permet d'en déduire le signe de $f'(x)$, donc le sens de variation de f : $\Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times 2 = 16 - 24 = -8 < 0$, donc $f'(x)$ garde un signe constant. Plus précisément pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) On calcule $f(-2) = (-2)^3 + 2\times(-2)^2 + 2\times(-2) + 4 = 0$ et $f(0) = 4$. Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pour tout réel $x \in [-2;0]$, on aura $f(-2) \leq f(x) \leq f(0)$, c'est-à-dire $f(x) \geq 0$

3) Puisque pour tout réel $x \in [-2;0]$, $f(x) \geq 0$, l'aire en cm^2 de la partie *D* du plan limitée par (*C*), les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = -2$ sera égale à $\int_{-2}^{0} f(x)dx = F(0) - F(-2)$ où F est une primitive de *f* sur [0 ;2].

Une primitive de *f* sur [0 ;2] est donnée par $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x$, donc

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = F(0) - F(-2) = \frac{0^4}{4} + \frac{2\times 0^3}{3} + 0^2 + 4\times 0^2 - \left(\frac{(-2)^4}{4} + \frac{2\times(-2)^3}{3} + (-2)^2 + 4\times(-2)\right)$$

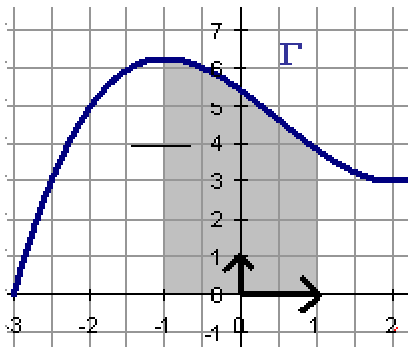
$$= -\left(\frac{-16}{3}\right) = \frac{16}{3} \text{ unités d'aires}$$

Exercice n°35 (énoncé)

Si le côté du carreau mesure 1 cm, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ nous indiquent que 1 unité d'aire = 2 cm^2

Puisque pour tout $x \in [-1;1]$, $f(x) \geq 0$, l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ mesure, en unités d'aires, l'aire du domaine délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

Ce domaine est hachuré ci-contre :



En comptant le nombre de petits carreaux, on constate que l'aire du domaine hachurée est supérieure à 18 cm^2 (et même plus !), c'est-à-dire 9 unités d'aire. Ainsi l'inégalité $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \geq 7$ est VRAIE

Puisque pour tout $x \in [-2;-1]$, $f(x) \geq 0$, l'intégrale $\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x$ mesure, en unités d'aires, l'aire du domaine délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = -2$ et $x = -1$.

En comptant le nombre de petits carreaux, on peut affirmer que cette aire est comprise entre 11 et 14 cm^2, donc que $\frac{11}{2} \leq \int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x \leq 7$

Exercice n°36 (énoncé)

1) D'après le graphique, 1 unité d'aire = 1 cm^2

Puisque pour tout $x\in[1;4]$, $g(x)\geq f(x)\geq 0$, l'aire du domaine A_1 est donné par l'intégrale $\int_1^4 \left(g(x)-f(x)\right)\mathrm{d}x$

Puisque pour tout $x\in[1;5]$, $h(x)\leq 0$, l'aire du domaine A_2 est donné par l'intégrale $-\int_1^5 h(x)\mathrm{d}x$

2)-Si pour tout $x\in[1;3]$, $1\leq g(x)\leq 4$, alors $\int_1^3 1dx\leq\int_1^3 g(x)dx\leq\int_1^3 4dx$ c'est-à-dire $2\leq\int_1^3 g(x)dx\leq 8$

3) Puisque pour tout $x\in[1;2]$, $f(x)\geq 0$, $\int_1^2 f(x)dx\geq 0$

Puisque pour tout $x\in[1;3]$, $g(x)\geq 0$, $\int_1^3 g(x)dx\geq 0$ donc $\int_1^3 -g(x)dx=-\int_1^3 g(x)dx\leq 0$

Puisque pour tout $x\in[1;2]$, $h(x)\leq 0$, $\int_1^2 h(x)dx\leq 0$

4) Puisque pour tout $x\in[1;3]$, $g(x)\geq f(x)\geq 0$, on aura $\int_1^3 g(x)dx\geq\int_1^3 f(x)dx\geq 0$ c'est-à-dire $J\geq I\geq 0$

Puisque pour tout $x\in[1;3]$, $h(x)\leq 0$, $\int_1^3 h(x)dx\leq 0$. Finalement $\boxed{K\leq I\leq J}$

Exercice n°37 (énoncé)

1) Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f(x)-g(x)=x^2+\dfrac{4}{x^2}-x^2=\dfrac{4}{x^2}>0$, donc C_f est au dessus de C_g sur $\left]0;+\infty\right[$

2) Puisque pour tout $x\in[1;5]$, $f(x)\geq g(x)$, l'aire entre C_f et C_g vaut :

$$\int_1^5\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_1^5\frac{4}{x^2}dx=\left[-\frac{4}{x}\right]_1^5=-\frac{4}{5}+\frac{4}{1}=\frac{16}{5}$$

3) a) Puisque pour tout $x\in[1;t]$ (pour $t>1$), $f(x)\geq g(x)$, l'aire entre C_f et C_g vaut :

$$A(t)=\int_1^t\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_1^t\frac{4}{x^2}dx=\left[-\frac{4}{x}\right]_1^t=-\frac{4}{t}+\frac{4}{1}=4-\frac{4}{t}=\frac{4t-4}{t}$$

b) On trouve ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}4-\dfrac{4}{t}=4$

Exercice n°38 (énoncé)

1) La division par 1-x implique $1-x\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}=\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

2) f est dérivable sur chacun des intervalles de D_f, en tant que quotient de fonctions qui le sont, et puisque f est de la forme $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, où $u(x)=x^2-7x+10\Rightarrow u'(x)=2x-7$ et $v(x)=2(1-x)\Rightarrow v'(x)=-2$, on en déduit que pour tout $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$, $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}=\dfrac{(2x-7)\times 2(1-x)-\left(x^2-7x+10\right)\times(-2)}{\left(2(1-x)\right)^2}$

$$=\frac{4x-4x^2-14+14x+2x^2-14x+20}{4(1-x)^2}=\frac{-2x^2+4x+6}{4(1-x)^2}=\frac{2\left(-x^2+2x+3\right)}{4(1-x)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{2(1-x)^2}$$

Puisque pour tout $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$, $2(1-x)^2>0$, $f'(x)$ sera du même signe que $P(x)=-x^2+2x+3$. Le calcul du discriminant de P donne $\Delta=(2)^2-4\times(-1)\times 3=16>0$ donc P admet deux racines réelles distinctes $\alpha=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{-2}=3$ et $\beta=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{-2}=-1$, d'où $P(x)=-(x-\alpha)(x-\beta)=-(x+1)(x-3)$, d'où le tableau de signes de $P(x)$ donc de $f'(x)$:

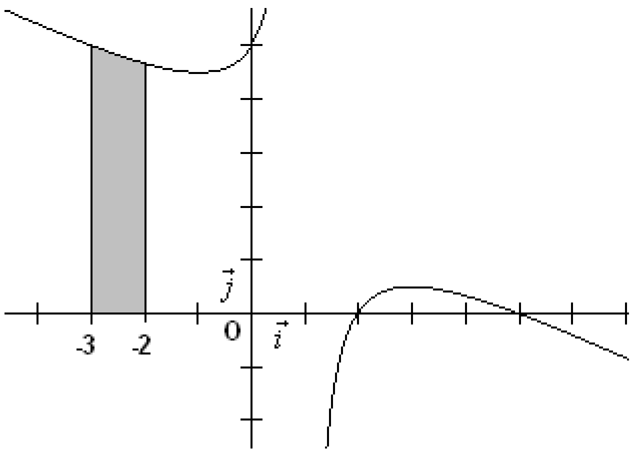
x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$P(x)$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $x \in]-\infty;-1]$ et sur $[3;+\infty[$, et strictement croissante sur $[-1;1[$ et sur $]1;3]$. Elle atteint donc deux extremums locaux en $x=-1$ et $x=3$, qui valent respectivement $f(-1)=4,5$ et $f(3)=0,5$
Aux points d'abscisses -1 et 3, C admet une tangente horizontale.
La limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle étant celle du quotient simplifié de ses numérateur et dénominateur, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x}{2} = -\infty$ et de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{x}{2} = +\infty$
De plus, $\lim\limits_{x\to 1} x^2-7x+10=4$. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 2(1-x)=0^-$ (car $x>1 \Leftrightarrow 1-x<0$), on en déduit, par quotient, que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\infty$. De même, puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} 2(1-x)=0^+$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=+\infty$. La droite d'équation $x=1$ est donc asymptote verticale à la courbe C.

Résumons cela dans le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$4,5$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	$0,5$	$\searrow$	$-\infty$

3) Pour tout $x \in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$,
$$-\frac{1}{2}x+3+\frac{2}{1-x} = -\frac{x(1-x)}{2(1-x)}+\frac{3\times 2(1-x)}{2(1-x)}+\frac{4}{2(1-x)} = \frac{-x+x^2+6-6x+4}{2(1-x)} = \frac{x^2-7x+10}{2(1-x)} = f(x)$$, d'où l'égalité demandée
4) Puisque pour tout $x\in[-3;-2]$, $f(x)>0$, l'aire considérée, mesurée en unités d'aires (ici $1\,ua = 2\times 2 = 4\,cm^2$) sera obtenue en calculant $\int_{-3}^{-2} f(x)dx = F(-2)-F(-3)$ où F est une primitive de f sur [-3 ;-2]
L'écriture de la question précédente nous permet d'en déduire l'écriture d'une primitive de f sur [-3 ;-2] :
Pour tout $x \in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$, $f(x) = -\frac{1}{2}x+3-\frac{2\times u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)=1-x$. Ainsi une primitive de f sur [-3 ;-2] est :
$$F(x) = -\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}+3x-2\ln\left(|u(x)|\right).$$
Or, pour tout $x\in[-3;-2]$, $1-x>0 \Leftrightarrow u(x)>0 \Leftrightarrow |u(x)|=u(x)$ donc $\boxed{F(x) = -\frac{x^2}{4}+3x-2\ln(1-x)}$.
Ainsi, $F(-2)-F(-3) = -\frac{(-2)^2}{4}+3\times(-2)-2\ln(1-(-2)) - \left(-\frac{(-3)^2}{4}+3\times(-3)-2\ln(1-(-3))\right)$
$$= -1-6-2\ln 3+\frac{9}{4}+9+2\ln(4) = 2+\ln 16-\ln 9 = 2+\ln\left(\frac{16}{9}\right)$$
L'aire cherchée vaut $4\left(2+\ln\left(\frac{16}{9}\right)\right) = 8+4\ln\left(\frac{16}{9}\right) \approx 10,3\ cm^2$

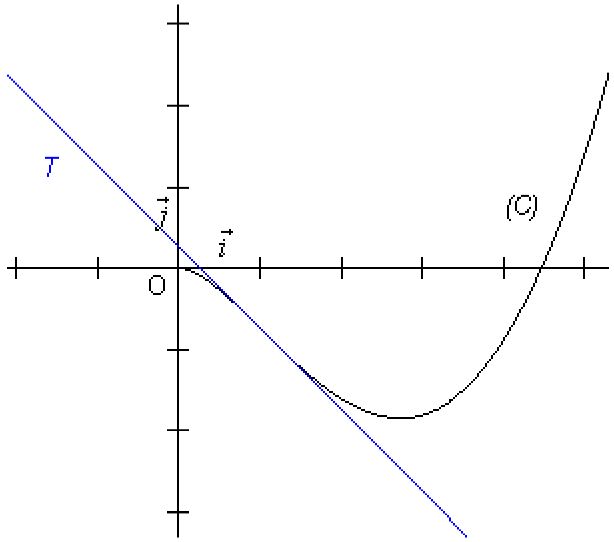


Exercice n°39 (énoncé)

1) Pour tout $x>0$, $f'(x)=x\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)+\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x}\right)=x\ln x-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x=x\ln x-x=x(\ln x-1)$. Puisque $x>0$, $f'(x)$ est du signe de $\ln x-1$. Ainsi $f'(x)>0\Leftrightarrow \ln x-1>0\Leftrightarrow \ln x>1\Leftrightarrow x>e$

f est donc strictement décroissante sur $]0;e]$ et strictement croissante sur $[e;+\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-\frac{3}{2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}=+\infty$, donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$



2) a) Pour calculer $I(\lambda)=\int_\lambda^e f(x)dx=\int_\lambda^e \frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)dx$, on doit effectuer une **intégration par parties**

On pose $u(x)=\ln x-\frac{3}{2}\Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v'(x)=\frac{x^2}{2}\Rightarrow v(x)=\frac{x^3}{6}$, fonctions toutes deux continûment dérivables sur tout intervalle de la forme $]\lambda;e]$ (avec $\lambda>0$). Le calcul devient alors :

$$I(\lambda)=\int_\lambda^e f(x)dx=\int_\lambda^e \frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)dx=\int_\lambda^e v'(x)u(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_\lambda^e-\int_\lambda^e u'(x)v(x)dx=\left[\frac{x^3}{6}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)\right]_\lambda^e-\int_\lambda^e \frac{x^3}{6}\times\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{e^3}{6}\left(\ln e-\frac{3}{2}\right)-\frac{\lambda^3}{6}\left(\ln\lambda-\frac{3}{2}\right)-\int_\lambda^e\frac{x^2}{6}dx=-\frac{e^3}{12}-\frac{\lambda^3}{6}\ln\lambda+\frac{\lambda^3}{4}-\left[\frac{x^3}{18}\right]_\lambda^e=-\frac{e^3}{12}-\frac{\lambda^3}{6}\ln\lambda+\frac{\lambda^3}{4}-\frac{e^3}{18}+\frac{\lambda^3}{18}$$

$$=-\frac{5e^3}{36}+\frac{11\lambda^3}{36}-\frac{\lambda^3}{6}\ln\lambda$$

b) Puisque $\lim\limits_{\lambda\to0}\lambda\ln\lambda=0$ et $\lim\limits_{\lambda\to0}\frac{11}{36}\lambda^3=0$, on en déduit, par somme, que $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to0}I(\lambda)=-\frac{5e^3}{36}}$

c) Puisque pour tout $x\in]0;e]$, $f(x)<0$, l'intégrale $I(\lambda)=\int_\lambda^e f(x)dx$ représente, en unité d'aires, l'opposé de l'aire du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x=\lambda$ et $x=e$.

Si on fait tendre λ vers 0, on peut donc affirmer que l'aire du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=e$ vaut $\frac{5e^3}{36}$.